Convergence des polygones de Harder-Narasimhan

Huayi Chen

Huayi Chen

CONVERGENCE DES POLYGONES DE HARDER-NARASIMHAN

Huayi Chen
CMLS, École Polytechnique.
E-mail : huayi.chen@polytechnique.org

CONVERGENCE DES POLYGONES DE HARDER-NARASIMHAN

Huayi Chen

Résumé. — On reformule la théorie des polygones de Harder-Narasimhan par le langage des $\mathbb{R}$-filtrations. En utlisant une variante du lemme de Fekete et un argument combinatoire des monômes, on établit la convergence uniforme des polygones associés à une algèbre graduée munie des filtrations. Cela conduit à l'existence de plusieur invariants arithmétiques dont un cas très particulier est la capacité sectionnelle. Deux applications de ce résultat dans la géométrie d'Arakelov sont abordées : le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique ainsi que l'existence et l'interprétation géométrique de la pente maximale asymptotique.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans l'approximation diophantienne, on s'intéresse à étudier les solutions rationnelles d'un système d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres. L'approche d'Arakelov, qui est une combinaison de la théorie des schémas à la Grothendieck avec la géométrie complexe hermitienne, fournit un cadre géométrique bien adapté aux équations polynomiales en tenant compte les métriques.

Un formalisme important dans ce cadre est l'application d'évaluation et la méthode de pentes dues à J.-B. Bost [**3, 6**]. Étant donnés un corps de nombres K, une variété projective X définie sur K et un faisceau inversible ample L sur X, l'espace $H^0(X, L)$ peut être considéré comme un espace de "polynômes homogènes". L'*application d'évluation* (notée $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$) est un homomorphisme de $H^0(X, L)$ vers $H^0(\Sigma, L|_\Sigma)$ défini par restriction des sections à Σ, où Σ est un sous-K-schéma fermé de X. Cela généralise la construction classique qui consiste à évaluer les valeurs des polynômes homogènes en un ou plusieur points rationnels.

Quitte à choisir un modèle entier de (X, L) et une métrique hermitienne sur $L_\mathbb{C}$, la source et le but de l'application $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$ deviennent des espaces vectoriels sur K associés à certains *fibrés vectoriels hermtiens* sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers dans K. On obtient, en utilisant les inégalités de pentes, des éléments non-nuls dans $H^0(X, L)$ dont l'image par $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$ est nulle. Classiquement ces éléments sont appelés des "polynômes auxilliaires" qui sont des objets essentiels dans l'approximation diophantienne, souvent construits par le lemme de Siegel.

L'intérêt de la méthode de pentes est de transformer une "démonstration de transcendence" à une seule inégalité. Cette inégalité, dont les ingrédients sont des invariants arithmétiques naturellement définis, comme la *hauteur* d'un homomorphisme K-linéaire, le *degré d'Arakelov* et la *pente* d'un fibré vectoriel hermitien, permet de séparer les contributions de différents termes, et de donner un cadre plus souple pour diverses méthodes d'estimation.

Dans de nombreuses applications, on considère une suite d'applications d'évaluation $\mathrm{EV}_{\Sigma,L^{\otimes n}}$ et étudie leur comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini. Il est donc nécessaire de comprendre le comportement asymptotique des fibrés vectoriels hermitiens dont l'espace vectoriel sous-jaent est $H^0(X, L^{\otimes n})$.

Le premier résultat dans cette direction est le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique dû à Gillet et Soulé [**20**]. Soient $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ un modèle entier de (X, L) et $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le morphisme structurel. Si on munit l'espace vectoriel $H^0(X, L^{\otimes n})$ des sup-normes, le $\mathcal{O}_K$-module $\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ peut être considéré comme un réseau dans un espace vectoriel normé. Gillet et Soulé ont montré que, si les métriques sur L sont positives, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \chi(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}), \|\cdot\|_{\sup}) = \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1},$$

où $d = \dim X$, $\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}$ est le nombre d'intersection arithmétique et χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui est le logarithme du volume de la boule unité divisé par le covolume du réseau. Une reformulation de ce résultat est

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n = \frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}^{d+1})}{[K:\mathbb{Q}](d+1)c_1(L)^d},$$

où $\widehat{\mu}$ est la fonction de pente, qui est le degré d'Arakelov normalisé divisé par le rang.

Bien que les autres pentes comme par exemple la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}$, qui est la valeur maximale des pentes des sous-fibrés, et la pente minimale $\widehat{\mu}_{\min}$, qui est la valeur minimale des pentes des fibrés quotients, interviennent aussi naturellement dans les inégalités de pentes, on sait relativement peu sur leur comportement asymptotique. Par exemple, dans [**4**], Bost a démontré que les pentes maximales $\widehat{\mu}_{\max}(S^n\overline{E})$ coissent linéairement lorsque n tend vers l'infini. Il a aussi obtenu des majorations de ces pentes maximales. Mais on ne sait pas en général si la limite des $\widehat{\mu}_{\max}(S^n\overline{E})/n$ existe dans $\mathbb{R}$. L'une des difficultés est que, contrairement à la fonction de pente $\widehat{\mu}$, en général la pente maximale et la pente minimale n'admettent pas d'additivité par rapport aux suites exactes courtes, qui est une condition importante dans la technique de dévissage.

Le but de cet article est alors d'étudier le comportement asymptotique des fibrés vectoriels hermitiens. En particulier, on établit la convergence des suites $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n)_{n\geq 1}$ et $(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n)_{n\geq 1}$. Pour surmonter la difficulté d'absence de l'additivité, on utilise la technique de polygone de Harder-Narasimhan avec le point de vue des $\mathbb{R}$-filtrations et des mesures. Le polygone de Harder-Narsimhan est initialement une notion en géométrie algébrique, proposée par Harder et Narasimhan [**25**]. En géométrie d'Arakelov, cette notion est introduite par Stuhler [**36**] et Grayson [**21**]. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ est par définition la fonction concave sur $[0, \operatorname{rg} E]$ dont le graphe est l'enveloppe convexe des points $(\operatorname{rg} F, \widehat{\deg}_n(F))$, où $\widehat{\deg}_n(F)$ est le degré d'Arakelov normalisé de F. On désigne par $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ la forme normalisée de ce polygone, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0, 1]$ dont le graphe est similaire à celui du polygone de Harder-Narasimhan. L'avantage du polygone normalisé est qu'il permet d'étudier les diverses pentes en même temps :

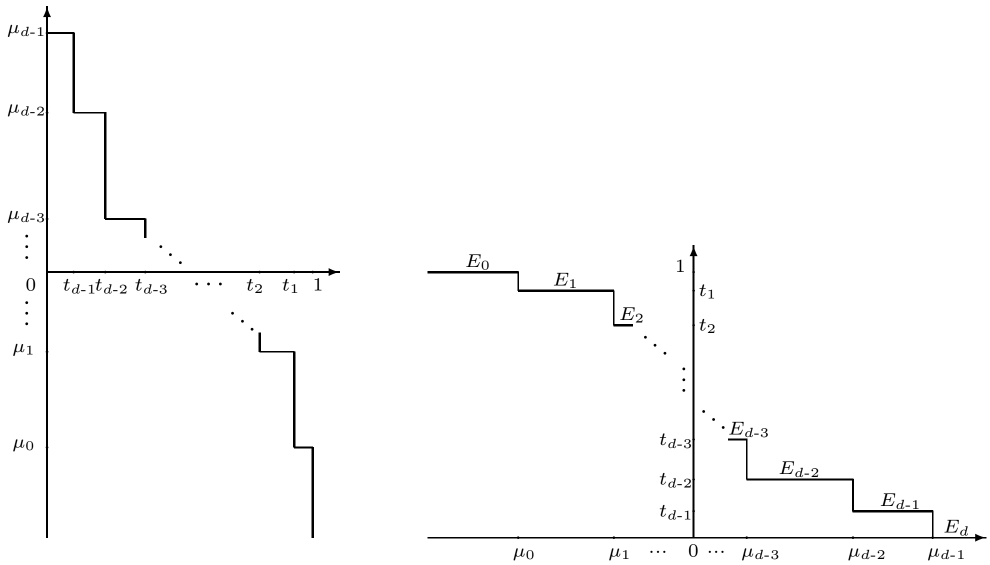
$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = P_{\overline{E}}(1), \qquad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{t\to 0+} P'_{\overline{E}}(t), \qquad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \lim_{t\to 1-} P'_{\overline{E}}(t).$$

Les sommets du polygone de Harder-Narasimhan correspondent à un drapeau de E :

$$E = E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_d = 0$$

tel que les sous-quotients $\overline{E_i/E_{i+1}}$ soient semi-stables (c'est-à-dire $\mu_i := \widehat{\mu}(\overline{E_i/E_{i+1}})$ coïncide avec $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E_i/E_{i+1}})$) et que les pentes successives μ_i satisfassent aux inégalités $\mu_0 < \cdots < \mu_{d-1}$. Classiquement le drapeau comme ci-dessus s'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$. Mais la donnée d'un drapeau et d'une suite strictement croissante de nombres réels de la même longueur définit en fait une $\mathbb{R}$-filtration décroissante. Dans la figure 1, le graphe à gauche représente la dérivée

FIGURE 1. Dérivé du polygone normalisé et la fonction de distribution



du premier order de la fonction $\mathcal{P}_{\overline{E}}$, où $t_i = \operatorname{rg} E_i / \operatorname{rg} E$. C'est une fonction d'escalier définie sur $[0, 1]$. Le graphe à droite répresente la fonction inverse de la fonction dans le graphe à gauche. C'est une fonction décroissante d'escalier définie sur $\mathbb{R}$ qui prend valeurs dans $[0, 1]$. Elle définit donc une mesure de probabilité borélienne $\nu_{\overline{E}}$ sur $\mathbb{R}$. Si on place convenablement les E_i, comme présenté dans le graphe à droite, on obtient une $\mathbb{R}$-filtration décroissante de E qui induit par changement de scalaire à K une $\mathbb{R}$-filtration décroissante $\mathcal{F}^{\overline{E}}$ de E_K.

Réciproquement, si on se donne un espace vectoriel de rang fini et non-nul V sur K muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$, alors la fonction $\operatorname{rg}(\mathcal{F}_x V)/\operatorname{rg} V$ est une fonction d'escalier décroissante, comme dans le graphe à droite. L'integrale de son inverse définit une fonction concave et linéaire par morceaux — c'est-à-dire un polygone — sur $[0,1]$. En résume, on a des applications natuelles

$$\left\{\begin{array}{l}\text{espaces vectoriels de}\\ \text{rang fini } \mathbb{R}\text{-filtrés}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{mesures de probabilité borélienne}\\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ combinaisons linéaires de}\\ \text{mesures de Dirac}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{polygones}\\ \text{sur } [0,1]\end{array}\right\},$$

dont la dernière est une bijection, qui envoie $\nu_{\overline{E}}$ en $\mathcal{P}_{\overline{E}}$. Cela nous permet d'utiliser les espaces $\mathbb{R}$-filtrés et les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ à étudier les fibrés vectoriels hermitiens. En outre, des constructions similaires existent dans le cadre géométrique des fibrés vectoriels sur une courbe.

L'algèbre $B = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ des sections globales, munie des filtrations de Harder-Narasimhan est une algèbre graduée de type fini munie de $\mathbb{R}$-filtrations. On a expliqué plus haut que l'information des pentes et des polygones de Harder-Narasimhan est complètement encodée dans les $\mathbb{R}$-filtrations de B. On propose deux stratégies différentes à étudier le comportement asymptotique de ces filtrations. La première est inspirée par un travail de Faltings et Wüstholz [**17**], qui est une généralisation de la théorie des séries de Poincaré — un instrument important à étudier des algèbres graduées, classiquement utilisée pour déterminer le comportement asymptotique des rangs des composantes homogènes. Bien que cette approche permet de calculer explicitement la limite des polygones, elle n'est valable que pour le cas particulier où les filtrations sont induite par une autre graduation de B. L'une des obstruction d'utiliser la méthode de série de Poincaré au cas général est que, dans une algèbre graduée, le degré du produit de deux éléments homogènes est égal à la somme de leurs degrés; par contre, dans l'algèbre munie des filtrations qui nous intéresse, en général on sait seulement une minoration de la position d'un produit dans la filtration par la somme des positions de chaque élément, avec même un terme d'erreur. Cette observation conduit à la deuxième stratégie : suites presque sur-additives et lemme de Fekete. Le lemme de Fekete est une méthode classique à déterminer la convergence d'une suite sous(sur)-additive : si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle qui est sur-additive, à savoir $a_{n+m} \geq a_n + a_m$ quels que soient m, n, alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et la limite est finie lorsque $a_n = O(n)$. On établit d'abord la presque sur-additivité de la suite des mesures associées aux filtrations de l'algèbre graduée, et on en déduit la convergence vague des mesures dilatées en faisant appel à une variante du lemme de Fekete. Enfin on obtient la convergence uniforme des polygones par le lien entre les mesures et les polygones. Par une méthode similaire, l'existence des limites de pentes maximales et de pentes minimales est aussi obtenue.

Les résultats obtenus dans cet article peuvent être comparés à un travail de Rumely, Lau et Varley [**34**] sur l'existence des capacités sectionnelles. La capacité sectionnelle est un invariant qui généralise simultanément la capacité logarithmique d'un diviseur en géométrie complexe, et le nombre d'auto-intersection d'un fibré inversible hermitien en géométrie d'Arakelov. Le résultat sur la convergence des polygones que l'on obtient implique en particulier l'existence et la positivité de la capacité sectionnelle au cas des normes (dans [**34**], les auteurs considèrent un cadre plus général des semi-normes) et donc implique le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique. De plus, la convergence des polygones est valable pour toute algèbres graduées de type fini munie de filtrations convenables. Donc le polygone limite est un invariat arithmétique qui existe dans un cadre très général et qui généralise de nombreux invariants intéressants.

Dans le cas où les métriques sur L sont positives, la valeur en 1 de la limite des polygones est liée au nombre d'intersection arithmétique de $\overline{\mathscr{L}}$. Il est donc très naturelle d'étudier les interprétations géométrique des autres invariants limites. Dans cet article, on propose une telle interprétation pour la pente maximale asymptotique $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ — la limite des $\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))/n$ — par une propriété d'annulation de sections non-nulle de petite norme. En outre, on démontre que cette pente maximale asymptotique est sur-additive par rapport à $\overline{\mathscr{L}}$. Cette observation nous permet d'étendre son domaine de définition à l'ensemble de tous les fibrés inversibles hermitiens $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathscr{X}$, même si les espaces $\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ se réduisent éventuellement à zéro. Cela montre que cet invariant a une souplesse à appliquer dans diverses situations. Le lien explicite avec la propriété d'annulation suggère des applications en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov dans la future.

L'article est organisé comme la suite. Dans le premier chapitre, on rappelle d'abord quelques notations utilisées dans l'article; ensuite, un préliminaire sur les $\mathbb{R}$-filtrations est introduit, y compris la mesure et le polygone associés à une filtration, qui sont des outils importants; la section suivante est consacrée à quelques généralisations du lemme de Fekete; enfin, on rappelle des faits dans la géométrie algébrique que l'on utilisera plus loin. Le deuxième chapitre est un rappel sur la théorie des fibrés vectoriels adéliques, tout particulièment sur les polygones de Harder-Narasimhan, qui sont des objets à étudier dans cet article. C'est dans le troisième chapitre que le résultat principal de l'article — la convergence des polygone — est démontré : la première section est consacrée au cas d'algèbres bigraduées, où on développe la méthode des séries de Poincaré à deux variables; dans la deuxième section, on propose deux notions, *algèbre graduée quasi-filtrée* et *algèbre graduée pseudo-filtrée*, qui sont des algèbres graduées munies des filtrations où la converge des polygones est suspectible d'être vraie; on démontre dans la troisième section cette convergence pour le cas particulier où l'algèbre graduée est une algèbre de polynômes, en utilisant un argument combinatoire fin sur les monômes et en faisant appel au lemme de Fekete généralisé appliqué aux mesures associées aux filtrations; enfin, dans la quatrième section, on démontre le cas général par réduction au cas précédent d'algèbres de polynômes. Le dernier chapitre est consacré aux applications de la théorie générale établie dans le chapitre précédent : on obtient l'existence de la capacité sectionnelle et donc le théorème d'Hilbert-Samuel arithmétique; ensuite, l'interprétation géométrique de la pente maximale asymptotique est discutée; enfin, on aborde l'analogue de ces résultats dans le cadre de la géométrie algébrique sur une courbe.

Une grande partie des résultats dans cet article est issue de ma thèse doctorale dirigée par J.-B. Bost. Je tiens à lui exprimer mes remerciements pour son encadrement et ses encouragements. Je suis reconnaissant à É. Gaudron qui m'a invité à une rencontre de l'ANR « *Autour de la théorie des pentes* » organisée à l'Institut Fourier où j'ai appris de lui la théorie des fibrés vectoriels adéliques.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES

1.1. Notations et rappels sur un corps de nombres

Dans cet article, sauf mention au contraire, K désigne un corps de nombres dont l'anneau des entiers est noté $\mathcal{O}_K$. On désigne par Σ_f l'ensemble des places finies de K, qui s'identifie à l'ensemble des points fermés dans $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Soit Σ_∞ l'ensemble des places infinie de K, qui se décompose en une union disjointe de deux parties : $\Sigma_{\infty,r}$ des places réelles et $\Sigma_{\infty,c}$ des places complexes.

Si $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$ est une place finie de K, on désigne par $v_\mathfrak{p} : K^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation discrète associée à $\mathfrak{p}$. Soient $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ le corps résiduel de $\mathfrak{p}$ et $|\cdot|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue sur K telle que $|a|_\mathfrak{p} = p^{-v_\mathfrak{p}(a)}$ pour tout $a \in K^\times$, où p est la caractérsitique de $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$. On note $n_\mathfrak{p} = [\mathbb{F}_\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$.

Chaque place infinie $v \in \Sigma_\infty$ correspond à un plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, unique à conjugaison complexe près. On désigne par $|\cdot|_v$ la valeur absolue sur K définie par $|a|_v = |\sigma(a)|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$. On définit $n_v = 1$ si $v \in \Sigma_{\infty,r}$ et $n_v = 2$ si $v \in \Sigma_{\infty,c}$.

La *formule de produit* comme ci-dessous est importante dans la théorie des nombres : si a est un élément non-nul de K, alors, pour toute sauf un nombre fini de places $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$, $|a|_\mathfrak{p} = 1$; de plus, on a

$$\prod_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} |a|_v^{n_v} = 1. \tag{1}$$

Pour toute place $v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$, on désigne par K_v le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_v$, et par $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v. La valeur absolue $|\cdot|_v$ sur K s'étend de façon unique sur $\mathbb{C}_v$.

Pour toute place finie $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$, on désigne par $\mathbf{m}_\mathfrak{p}$ la mesure de Haar sur $K_\mathfrak{p}$ normalisée de sorte que $\mathbf{m}_\mathfrak{p}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) = 1$, où $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est l'anneau des éléments $a \in K_\mathfrak{p}$ tels que $|a|_\mathfrak{p} \leq 1$. Pour toute $v \in \Sigma_{\infty,r}$, soit $\mathbf{m}_v$ la mesure de Lebesgue sur $K_v = \mathbb{R}$. Pour toute $w \in \Sigma_{\infty,c}$, soit $\mathbf{m}_w$ le double de la mesure de Lebesgue sur $K_w = \mathbb{C}$.

Soit $\mathbf{A}_K$ l'anneau topologique des *adèles* de K. On rappelle que $\mathbf{A}_K$ est le sous-espace du produit $\prod_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} K_v$ des éléments $\alpha=(\alpha_v)_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty}$ tels que, pour tout $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$ en dehors d'un nombre fini, on ait $\alpha_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Le produit des mesures $\mathbf{m}_v$ définit une mesure de Haar $\mathbf{m}$ sur $\mathbf{A}_K$. En outre, le corps K se plonge diagonalement dans $\mathbf{A}_K$ comme un sous-anneau et l'espace quotient $\mathbf{A}_K/K$ est compact. Plus généralement, si E est un espace vectoriel de rang fini r sur K, quitte à choisir une base de E, on peut identifier $E\otimes\mathbf{A}_K$ à $\mathbf{A}_K^r$ et donc on obtient une mesure de Haar $\mathbf{m}_E$ sur $E\otimes\mathbf{A}_K$. D'après la formule de produit, cette mesure ne dépend pas du choix de la base de E. En outre, le *covolume* de E dans $E\otimes_K\mathbf{A}_K$ pour la mesure $\mathbf{m}_E$, c'est-à-dire la mesure d'un domaine fondamental du quotient $(E\otimes_K\mathbf{A}_K)/E$ pour $\mathbf{m}_E$, est égale à $|D_K|^{\operatorname{rg}E/2}$, où D_K est le discriminant absolu de K.

1.2. Filtrations des espaces vectoriels

On présente dans cette section les propriétés élémetaires des $\mathbb{R}$-filtrations. Ce sont des objets intermédiaires à travers desquels on étudie les invariants arithmétiques. On fixe un corps k. Sauf mention au contraire, tous les espaces vectoriels sont supposés être sur k et de rang fini.

1.2.1. Définition et constructions. —

Définition 1.2.1. — Soit V un espace vectoriel sur k. On appelle $\mathbb{R}$-*filtration* (ou simplement *filtration*) de V toute famille $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_aV)_{a\in\mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de V soumise aux conditions suivantes :

1) $\mathcal{F}_aV\supset\mathcal{F}_{a'}V$ pour tous les réels a et a' tels que $a\le a'$,
2) $\mathcal{F}_aV=0$ pour a suffisamment positif,
3) $\mathcal{F}_aV=V$ pour a suffisamment négatif,
4) la fonction $a\mapsto\operatorname{rg}(\mathcal{F}_aV)$ est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

Un *espace vectoriel filtré* est un espace vectoriel muni d'une filtration, c'est-à-dire un couple $(V,\mathcal{F})$ où V est un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ est une filtration de V.

Remarque 1.2.2. — Les conditions 2)—4) sont en fait respectivement la *séparation*, l'*exhaustivité* et la *continuité à gauche* de la filtration $\mathcal{F}$, que l'on supposera toujours dans cet article.

Une filtration $\mathcal{F}$ de V est équivalente à la donnée d'un drapeau

$$V=V_0\supsetneq V_1\supsetneq V_2\supsetneq\cdots\supsetneq V_d=0$$

de V et d'une suite strictement croissante $(a_i)_{0\leq i<d}$. En effet, on construit de telle donnée une filtration de la forme

$$\mathcal{F}_a V = \bigcup_{\substack{0\leq i<d\\ a_i\geq a}} V_i.$$

Réciproquement, étant donnée une filtration $\mathcal{F}$, la fonction $a \mapsto \operatorname{rg}(\mathcal{F}_a V)$ est décroissante, continue à gauche et prend valeurs dans l'ensemble fini $\{0,\cdots,\operatorname{rg}V\}$, donc elle est de la forme

$$\operatorname{rg}V\cdot 1\!\!1_{]-\infty,a_0]}(a)+\sum_{i=1}^{d-1} r_i 1\!\!1_{]a_{i-1},a_i]}(a),$$

où $a_0<\cdots<a_{d-1}$ et $0<r_{d-1}<\cdots<r_1<\operatorname{rg}V$. Soit $V_i=\mathcal{F}_{a_i}V$ pour $i\in\{0,\cdots,d-1\}$ et soit $V_d=0$. On obtient alors un drapeau $V=V_0\supsetneq V_1\supsetneq\cdots\supsetneq V_d=0$ et une suite strictement croissante $(a_i)_{0\leq i<d}$.

Étant donné un vecteur $x\in V$, la position de ce vecteur dans la filtration $\mathcal{F}$ est donnée par la fonction $\lambda_{\mathcal{F}}:V\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ suivante :

$$\lambda_{\mathcal{F}}(x):=\sup\{a\in\mathbb{R}\mid x\in\mathcal{F}_aV\}. \tag{2}$$

Cette application prend valeurs dans l'ensemble $\{a_0,\cdots,a_{d-1}\}\cup\{+\infty\}$, et elle est finie sur $V\setminus\{0\}$. On note en outre

$$\lambda_{\min}(\mathcal{F})=a_0=\min_{x\in V}\lambda_{\mathcal{F}}(x),\qquad \lambda_{\max}(\mathcal{F})=a_{d-1}=\sup_{0\neq x\in V}\lambda_{\mathcal{F}}(x). \tag{3}$$

Si V est nul, alors par convention $\lambda_{\min}(\mathcal{F})=+\infty$ et $\lambda_{\max}(\mathcal{F})=-\infty$.

Proposition 1.2.3. — *1) Pour tout $u\in K^\times$ et tout $x\in V$, $\lambda_{\mathcal{F}}(ux)=\lambda_{\mathcal{F}}(x)$.*
2) $\lambda_{\mathcal{F}}(x)\geq b$ si et seulement si $x\in\mathcal{F}_bV$.
3) Pour tous les éléments x et y de V, $\lambda_{\mathcal{F}}(x+y)\geq\min(\lambda_{\mathcal{F}}(x),\lambda_{\mathcal{F}}(y))$.
4) Si x et y sont deux éléments de V tels que $\lambda_{\mathcal{F}}(x)\neq\lambda_{\mathcal{F}}(y)$, alors $x+y\neq 0$, et $\lambda_{\mathcal{F}}(x+y)=\min(\lambda_{\mathcal{F}}(x),\lambda_{\mathcal{F}}(y))$.

Démonstration. — 1) Comme u est inversible, $x\in\mathcal{F}_aV$ si et seulement si $ux\in\mathcal{F}_aV$, d'où $\{a\in\mathbb{R}\mid x\in\mathcal{F}_aV\}=\{a\in\mathbb{R}\mid ux\in\mathcal{F}_aV\}$.

2) Si $x\in\mathcal{F}_bV$, alors $b\in\{a\in\mathbb{R}\mid x\in\mathcal{F}_aV\}$. Donc $\lambda_{\mathcal{F}}(x)\geq b$. Réciproquement, si $\lambda_{\mathcal{F}}(x)\geq b$, alors $\lambda_{\mathcal{F}}(x)>b-\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon>0$. On en déduit $x\in\mathcal{F}_{b-\varepsilon}V$ pour tout $\varepsilon>0$. Or la fonction $a\mapsto\operatorname{rg}(\mathcal{F}_aV)$ est continue à gauche, l'égalité $\mathcal{F}_{b-\varepsilon}V=\mathcal{F}_bV$ est vraie lorsque ε est suffisamment petit. Donc $x\in\mathcal{F}_bV$.

3) Soient $a=\lambda_{\mathcal{F}}(x)$ et $b=\lambda_{\mathcal{F}}(y)$. D'après 2), on a $x\in\mathcal{F}_aV$ et $y\in\mathcal{F}_bV$. Il est anodin de supposer $a\geq b$. Alors $x\in\mathcal{F}_bV$ puisque $\mathcal{F}_aV\subset\mathcal{F}_bV$. On en déduit donc $x+y\in\mathcal{F}_bV$ et $\lambda_{\mathcal{F}}(x+y)\geq b$ compte tenu de 2).

4) Si $x+y=0$, alors $x=-y$. D'après 1), $\lambda_{\mathcal{F}}(x)=\lambda_{\mathcal{F}}(y)$. Cela est absurde. Donc $x+y$ est non-nul. On peut supposer $\lambda_{\mathcal{F}}(x)<\lambda_{\mathcal{F}}(y)$. Pour tout $a\in]\lambda_{\mathcal{F}}(x),\lambda_{\mathcal{F}}(y)[$,

on a $y \in \mathcal{F}_a V$ mais $x \notin \mathcal{F}_a V$. Donc $x + y \notin \mathcal{F}_a V$ et $\lambda_{\mathcal{F}}(x + y) < a$. Comme a est arbitraire, $\lambda_{\mathcal{F}}(x + y) \leq \lambda_{\mathcal{F}}(x)$. D'après 3) on obtient l'égalité. □

Étant donnée une application k-linéaire $f : V \to W$ d'espaces vectoriels et une filtration de l'un des espaces V et W, sous certaine condition de f, on peut construire "naturellement" une filtration de l'autre espace. On présente dans la suite ces constructions en commençant par définir la compatibilité de f aux filtrations.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des filtrations de V et de W respectivement. On dit que l'application f est *compatible* aux filtrations $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si $f(\mathcal{F}_a V) \subset \mathcal{G}_a W$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$, ou de façon équivalente, $\lambda_{\mathcal{G}}(f(x)) \geq \lambda_{\mathcal{F}}(x)$ pour tout $x \in V$.

La composition de deux applications k-linéaires compatibles aux filtrations est encore compatible aux filtrations. Donc les espaces vectoriels filtrés et les applications k-linéaires compatibles aux filtrations forment une catégorie que l'on notera $\mathbf{Fil}_k$.

Si $f : V \to W$ est injective et si $\mathcal{G}$ est une filtration de W, on désigne par $f^*\mathcal{G}$ la filtration de V telle que $(f^*\mathcal{G})_a V = f^{-1}(\mathcal{G}_a W)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, appelée la *filtration induite* (de $\mathcal{G}$ par f). Pour tout $x \in V$, $\lambda_{f^*\mathcal{G}}(x) = \lambda_{\mathcal{G}}(f(x))$. Donc l'application f est compatible aux filtrations $(f^*\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

Si f est surjective et si $\mathcal{F}$ est une filtration de V, on définit une filtration notée $f_*\mathcal{F}$ de W telle que $(f_*\mathcal{F})_a W = f(\mathcal{F}_a V)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, appelée la *filtration quotiente* (de $\mathcal{F}$ par f). Pour tout $y \in W$, $\lambda_{f_*\mathcal{F}}(y) = \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \lambda_{\mathcal{F}}(x)$. L'application f est compatible aux filtrations $(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$.

1.2.2. Mesure associée à une filtration. — Soit V un espace vectoriel de rang $r > 0$. À chaque filtration de V sera associée une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On montrera que cette mesure admet une additivité par rapport aux suites exactes courtes (d'espaces vectoriels filtrés).

Soit $\mathscr{M}_1$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$. On définit une relation d'ordre $\succ$ sur $\mathscr{M}_1$:

> $\nu_1 \succ \nu_2$ *si et seulement si* $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\nu_1 \geq \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\nu_2$ *pour toute fonction croissante et bornée* f *sur* $\mathbb{R}$.

L'expression $\nu_2 \prec \nu_1$ est aussi utilisée pour désigner la relation $\nu_1 \succ \nu_2$.

Soit $\mathcal{F}$ une filtration de V. Si $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_r)$ est une base de V, on désigne par $\nu_{\mathcal{F},\mathbf{e}}$ la mesure de probabilité

$$\nu_{\mathcal{F},\mathbf{e}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \delta_{\lambda_{\mathcal{F}}(e_i)}$$

qui est une combinaison linéaire de mesure de Dirac. Le sous-ensemble de $\mathscr{M}_1$ formé des mesures de la forme $\nu_{\mathcal{F},\mathbf{e}}$ où $\mathbf{e}$ parcourt toutes les bases de V admet un élément maximal $\nu_{\mathcal{F}}$ pour la relation d'ordre $\succ$, appelée la *mesure associée à* $\mathcal{F}$. En effet, la mesure $\nu_{\mathcal{F},\mathbf{e}}$ est maximale si et seulement si la base $\mathbf{e}$ est compatible à la filtration $\mathcal{F}$, c'est-à-dir que $\#(\mathbf{e} \cap \mathcal{F}_r V) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}_r V)$ quel que soit $r \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.4. — *Pour toute base* $\mathbf{e}$ *de* V*, il existe une matrice triangulaire* A *dans* $M_{r\times r}(k)$ *dont la diagonale est* $(1,\cdots,1)$ *et telle que* $A\mathbf{e}$ *soit compatible à la filtration* $\mathcal{F}$*.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la décomposition de Bruhart pour le groupe linéraire général. Voir [**13**] 4.2.15 pour une preuve directe. □

Si la filtration $\mathcal{F}$ correspond au drapeau $V=V_0\supsetneq V_1\supsetneq V_2\supsetneq\cdots\supsetneq V_d=0$ et à la suite $(a_i)_{0\le i<d}$, alors la mesure $\nu_{\mathcal{F}}$ s'écrit comme

$$\nu_{\mathcal{F}}=\sum_{i=0}^{d-1}\frac{\operatorname{rg}V_i-\operatorname{rg}V_{i+1}}{\operatorname{rg}V}\delta_{a_i}, \tag{4}$$

ou de façon équivalente, $\nu_{\mathcal{F}}$ est la dérivée d'ordre un au sens de distribution de la fonction $x\mapsto 1-\operatorname{rg}(\mathcal{F}_xV)/\operatorname{rg}V$. En effet, si $\mathbf{e}=(e_1,\cdots,e_r)$ est une base compatible à la filtration $\mathcal{F}$, alors le nombre des éléments e_j tel que $\lambda_{\mathcal{F}}(e_j)=a_i$ est égal à $\operatorname{rg}(V_i/V_{i+1})$. On déduit de la formule (4) que

$$\lambda_{\min}(\mathcal{F})=\inf(\operatorname{supp}\nu_{\mathcal{F}})\quad\text{et}\quad\lambda_{\max}(\mathcal{F})=\sup(\operatorname{supp}\nu_{\mathcal{F}}),$$

où $\operatorname{supp}\nu_{\mathcal{F}}$ est le support de la mesure $\nu_{\mathcal{F}}$.

L'espace vectoriel nul admet une seule filtration. Pour simplifier les notations, on définit par convention la mesure associée à l'espace nul comme la mesure nulle. Attention : ce n'est plus une mesure de probabilité.

Bien que la catégorie $\mathbf{Fil}_k$ des espaces fitrés n'est guère une catégorie abélienne, les suites exactes courtes sont naturellement définies : on dit qu'une suite $0\longrightarrow(V',\mathcal{F}')\longrightarrow(V,\mathcal{F})\longrightarrow(V'',\mathcal{F}'')\longrightarrow 0$ de morphismes dans $\mathbf{Fil}_k$ est *exacte* si

1) la suite $0\longrightarrow V'\longrightarrow V\longrightarrow V''\longrightarrow 0$ est exacte,
2) la filtration $\mathcal{F}'$ est la filtration induite,
3) la filtration $\mathcal{F}''$ est la filtration quotiente.

Proposition 1.2.5. — *Si* $0\longrightarrow(V',\mathcal{F}')\longrightarrow(V,\mathcal{F})\longrightarrow(V'',\mathcal{F}'')\longrightarrow 0$ *est une suite exacte dans* $\mathbf{Fil}_k$*, alors*

$$\operatorname{rg}V\cdot\nu_{\mathcal{F}}=\operatorname{rg}V'\cdot\nu_{\mathcal{F}'}+\operatorname{rg}V''\cdot\nu_{\mathcal{F}''}. \tag{5}$$

Démonstration. — La suite $0\longrightarrow(V',\mathcal{F}')\longrightarrow(V,\mathcal{F})\longrightarrow(V'',\mathcal{F}'')\longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si, pour tout $r\in\mathbb{R}$, la suite

$$0\longrightarrow\mathcal{F}'_rV'\longrightarrow\mathcal{F}_rV\longrightarrow\mathcal{F}''_rV''\longrightarrow 0$$

d'homomorphismes k-linéaires est exacte. On obtient ainsi l'égalité $\operatorname{rg}(\mathcal{F}_rV)=\operatorname{rg}(\mathcal{F}'_rV')+\operatorname{rg}(\mathcal{F}''_rV'')$ et puis l'égalité (5) en prenant la dérivée au sens de distribution. □

1.2.3. Extension de base. — Si k'/k est une extension de corps, alors toute filtration $\mathcal{F}$ de V induit naturellement une filtration $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $V_{k'} := V \otimes_k k'$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_r V_{k'} = (\mathcal{F}_r V) \otimes_k k'$. Cette construction est fonctorielle, c'est-à-dire que l'application $(V, \mathcal{F}) \mapsto (V_{k'}, \widetilde{\mathcal{F}})$ définit en fait un foncteur de $\mathbf{Fil}_k$ vers $\mathbf{Fil}_{k'}$. Ce foncteur est exact dans le sens suivant : il envoie une suite exacte courte dans $\mathbf{Fil}_k$ vers une suite exacte courte dans $\mathbf{Fil}_{k'}$. En outre, ce foncteur préserve la mesure associée, plus précisément, on a $\nu_{\mathcal{F}} = \nu_{\widetilde{\mathcal{F}}}$.

1.2.4. Opérations sur les mesures. — On introduit deux sortes d'opérations sur l'espace de mesures $\mathscr{M}_1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de translation qui envoie x en $x + a$. Elle induit un automorphisme $\tau_a : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_1$ qui envoie une mesure de probabilité ν en son image directe par φ_a. Par définition, $\tau_{a+a'} = \tau_a \circ \tau_{a'}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de dilatation qui envoie x en εx. Elle induit par image directe un automorphisme $T_\varepsilon : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_1$. On a $T_{\varepsilon\varepsilon'} = T_\varepsilon \circ T_{\varepsilon'}$. En outre, les automorphismes τ_a et T_ε préservent la relation d'ordre $\succ$.

Étant donnés deux espaces filtrés et une bijection k-linéaire des espaces vectoriels sous-jacents, le lemme au-dessous compare les filtrations de la source et du but :

Lemme 1.2.6. — *Soient $(V, \mathcal{F})$ et $(V', \mathcal{F}')$ deux espaces vectoriels filtrés, $\varphi : V \to V'$ un isomorphisme de k-espaces vectoriels et c un nombre réel. Si, pour tout $x \in V$, $\lambda_{\mathcal{F}}(x) \le \lambda_{\mathcal{F}'}(\varphi(x)) + c$, alors $\tau_c \nu_{\mathcal{F}'} \succ \nu_{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de V qui est compatible à la filtration $\mathcal{F}$. Alors $\mathbf{e}' = (\varphi(e_i))_{1 \le i \le n}$ est une base de V', et

$$\tau_c \nu_{\mathcal{F}'} \succ \tau_c \nu_{\mathcal{F}', \mathbf{e}'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_{\mathcal{F}'}(\varphi(e_i)) + c} \succ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_{\mathcal{F}}(e_i)} = \nu_{\mathcal{F}}.$$

□

1.2.5. Polygone associé à une mesure. — On désigne par $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des fonctions concaves définies sur $[0,1]$ qui valent 0 en l'origine. Soit $\mathscr{M}_{1,c}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes à support compact sur $\mathbb{R}$. On définit au-dessous une application $\mathcal{P} : \mathscr{M}_{1,c} \to \mathcal{C}_0$. Cette application sera utilisée plus loin pour retrouver les polygones de Harder-Narasimhan.

Soient $\nu \in \mathscr{M}_{1,c}$ et $F_\nu : \mathbb{R} \to [0,1]$ la fonction définie par $F_\nu(x) = \nu(]x, +\infty[)$. On désigne par $\mathcal{P}(\nu) : [0,1] \to \mathbb{R}$ la *transformée de Legendre* (cf. [**29**] II §2.2) de la fonction concave $x \mapsto \int_0^x F_\nu(y)dy$.

Voici une forme explicite de la fonction $\mathcal{P}(\nu)$. Soit $F_\nu^* : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que $F_\nu^*(t) = \sup\{x \mid F_\nu(x) > t\}$. Comme ν est à support compact, F_ν^* est une fonction décroissante, continue à droite et bornée. En outre, pour tout $t \in [0,1[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $F_\nu(y) > t$ si et seulement si $y < F_\nu^*(t)$. La fonction $P(\nu)$ envoie $t \in [0,1]$ en $\int_{[0,t[} F_\nu^*(s)ds$.

L'application $\mathcal{P}$ préserve la relation d'ordre.

Proposition 1.2.7. — *Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures dans $\mathscr{M}_{1,c}$ telles que $\nu_1 \prec \nu_2$, alors $\mathcal{P}(\nu_1)(t) \leq \mathcal{P}(\nu_2)(t)$ quel que soit $t \in [0,1]$.*

Démonstration. — Par définition, $F_{\nu_1}(x) \leq F_{\nu_2}(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $F^*_{\nu_1} \leq F^*_{\nu_2}$ et donc $\mathcal{P}(\nu_1) \leq \mathcal{P}(\nu_2)$. □

L'espace $\mathscr{M}_{1,c}$ est invariant par les opérateurs τ_a et T_ε. De plus, on a les égalités :

$$\mathcal{P}(\tau_a\nu)(t) = \mathcal{P}(\nu)(t) + at, \qquad \mathcal{P}(T_\varepsilon\nu) = \varepsilon\mathcal{P}(\nu). \tag{6}$$

Si ν est une combinaison linéaire de mesures de Dirac, alors F^*_ν est une fonction d'escalier. Par conséquent, la fonction $\mathcal{P}(\nu)$ est linéaire par morceaux. Une telle fonction est appelée un *polygone* sur $[0,1]$. En particulier, si $(V,\mathcal{F})$ est un espace vectoriel filtré, alors $\mathcal{P}(\nu_\mathcal{F})$ est un polygone.

Définition 1.2.8. — La fonction $\mathcal{P}(\nu_\mathcal{F})$ est appelée le *polygone* associé à $\mathcal{F}$.

On rappelle qu'une suite de mesures boréliennes $(\nu_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ *converge vaguement* vers une mesure borélienne ν si et seulement si, pour toute fonction f continue et à support compact sur $\mathbb{R}$, la suite des intégrales $(\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\nu$. La convergence vague des mesures est liée à la convergence uniforme des polygones.

Proposition 1.2.9. — *Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures dans $\mathscr{M}_{1,c}$. On suppose que les supports des mesures ν_n sont uniformément bornés et que la suite de mesures $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement. Alors la mesure limite ν est aussi dans $\mathscr{M}_{1,c}$; de plus, la suite de fonctions $(\mathcal{P}(\nu_n))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\mathcal{P}(\nu)$.*

Démonstration. — Soit $I = [A,B]$ un intervalle fermé et borné tel que $\operatorname{supp}\nu_n \subset I$ pour tout n. Comme les supports des v_n sont tous contenus dans I, il en est de même du support de ν. Si f est une fonction de support compact à valeurs dans $[0,1]$ telle que $f|_I \equiv 1$, alors $\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\nu_n = 1$ pour tout n. On en déduit $\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\nu = 1$. Donc ν est une mesure de probabilité. Soit Z l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\{x\}) \neq 0$, qui est un ensemble dénombrable. Alors la suite F_{ν_n} converge simplement vers F_ν sur $\mathbb{R}\setminus Z$ d'après [**9**] IV §5 n°12 Proposition 22.

Si $t \in]0,1[$ et si $y = F^*_\nu(t)$, alors il existe une suite strictement croissante $(x_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}\setminus Z$ qui converge vers y. Comme $x_m < y$, on a $F_\nu(x_m) > t$. Comme $x_m \notin Z$, il existe $N(m) \in \mathbb{N}$ tel que $F_{\nu_n}(x_m) > t$, ou de façon équivalente, $x_m < F^*_{\nu_n}(t)$ pour tout $n > N(m)$. Cela implique $\liminf\limits_{n\to+\infty} F^*_{\nu_n}(t) \geq F^*_\nu(t)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit U_n l'ensemble des $t \in [0,1[$ tels que $F^{-1}_{\nu_n}(\{t\})$ ait un point intérieur. C'est un sous-ensemble dénombrable de $[0,1[$. Soient U'' l'ensemble des $t \in [0,1[$ tels que $F^{-1}_\nu(\{t\})$ ait un point intérieur et U l'union de U'' et tous les U'_n. L'ensemble U est dénombrable. Si $t \in [0,1[\setminus U$ et si $y = F^*_\nu(t)$, alors il existe une suite strictement décroissante $(x_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}\setminus Z$ qui converge vers y. Comme

$t \notin U''$, on obtient $F_\nu(x_m) < t$. Donc il existe $N(m) \in \mathbb{N}$ tel que $F_{\nu_n}(x_m) < t$ et alors $x_m \geq F^*_{\nu_n}(t)$ pour tout $n > N(m)$. On en déduit $\limsup_{n\to+\infty} F^*_{\nu_n}(t) = F^*_\nu(t)$.

D'après les arguments comme ci-dessus, il existe un sous-ensemble dénombrable U de $[0,1[$ tel que $(F^*_{\nu_n})_{n\geq 1}$ converge simplement vers F^*_ν sur $[0,1[\setminus U$. De plus, les fonctions $F^*_{\nu_n}$ sont uniformément bornées. Donc le théorème de convergence dominée montre que

$$\Big| \int_{[0,t[} F^*_{\nu_n}(s)\,\mathrm{d}s - \int_{[0,t[} F^*_\nu(s)\,\mathrm{d}s \Big| \leq \int_0^1 |F^*_{\nu_n}(s) - F^*_\nu(s)|\,\mathrm{d}s$$

convergent vers 0 quand n tend vers l'infini. □

On présente enfin quelques faits concernant la convergence vague des mesures que l'on utilisera plus loin dans le chapitre 3.

Lemme 1.2.10. — *Si f est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f\circ\varphi_\varepsilon - f\|_{\sup} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|f\circ\gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = 0.$$

Démonstration. — Comme f est à support compact, elle est uniformément continue. La première égalité est donc vraie.

On suppose que $\mathrm{supp}(f) \subset [-M,M]$, où $M > 0$. Pour tout $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$\|f\circ\gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = \sup_{-2M\leq x\leq 2M} |f(x+\varepsilon x) - f(x)|.$$

Comme f est uniformément continue,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{-2M\leq x\leq 2M} |f(x+\varepsilon x) - f(x)| = 0.$$

On en déduit donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f\circ\gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = 0$. □

Lemme 1.2.11. — *Soient $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathscr{M}_1$ et ν une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $]-1,+\infty[$ qui converge vers 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν;

2) la suite $(T_{1+a_n}\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν;

3) la suite $(\tau_{a_n}\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν.

Démonstration. — Comme $\tau_{a_n}^{-1} = \tau_{-a_n}$ et comme $T^{-1}_{1+a_n} = T_{(1+a_n)^{-1}} = T_{1-\frac{a_n}{1+a_n}}$, il suffit de vérifier "1)$\Longrightarrow$2)" et "1)$\Longrightarrow$3)", qui sont des conséquences immédiates du lemme 1.2.10. □

Lemme 1.2.12. — *Soient $(\nu'_n)_{n\geq 1}$, $(\nu_n)_{n\geq 1}$ et $(\nu''_n)_{n\geq 1}$ trois suites de mesures dans $\mathscr{M}_{1,\mathrm{c}}$ telles que $\nu'_n \prec \nu_n \prec \nu''_n$ quel que soit $n \geq 1$. On suppose que les supports des mesures ν'_n, ν_n et ν''_n sont uniforméments bornés et que les deux suites $(\nu'_n)_{n\geq 1}$ et $(\nu''_n)_{n\geq 1}$ convergent vaguement vers la même limite ν. Alors la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement aussi vers ν.*

Démonstration. — Comme les mesures que l'on considère sont à supports uniformément bornés, pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu'_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu''_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu.$$

Or, par l'hypothèse, si f est croissante et bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu'_n \leq \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu_n \leq \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu''_n.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu$ pour une telle fonction f. Enfin, comme une fonction continue et à support compact peut s'écrire comme la différence de deux fonctions continues croissantes et bornées, on en déduit que la suite de mesures $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν. □

1.2.6. Conventions. — Soit V un espace vectoriel sur k muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$. Dans la suite, s'il y a aucune ambiguïté sur la filtration $\mathcal{F}$, on utilise aussi l'expression λ_V ou simplement λ pour désigner la fonction $\lambda_{\mathcal{F}}$, et on utilise le symbole ν_V pour désigner la mesure associée à la filtration $\mathcal{F}$.

1.3. Suites presque sous(sur)-additives

Le but de cette article est de montrer la convergence d'une suite de certains invariants arithmétiques normalisés. Une méthode très classique pour montrer la convergence d'une suite normalisée est le lemme de Fekete (voir [**18**] page 233 pour un cas particulier). Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels, si cette suite est sous-additive (à savoir, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ quel que soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$), alors le lemme de Fekete affirme que la limite de la suite normalisée $(a_n/n)_{n\geq 1}$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. La preuve de ce résultat est un exercice facile.

Cependent, le lemme de Fekete — sous sa forme primitive — ne suffit pas pour notre application arithmétique. En effet, il s'agit des suites qui ne sont pas sur-additives mais seulement sur-additives à des termes d'erreur près. Par conséquent, il faut développer des critères de convergence qui sont plus généraux. Dans la suite, on présente deux telle généralisations dont la première (la proposition 1.3.1) concerne une suite multi-sous-additive à une erreur strictement sous-linéaire près et la seconde (la proposition 1.3.5) traite des suites presque sous-additives en demandant une condition plus forte de croissance lente sur les termes d'erreur. Dans les corollaires 1.3.2, 1.3.3 et 1.3.6 on présente les variantes sur-additives que l'on utilisera plus loin.

Proposition 1.3.1. — *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0,+\infty[$ et $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{R}$ une application telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/n = 0$. S'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour toute famille finie $(n_i)_{1\leq i\leq r}$ d'entiers supérieurs ou égaux à n_0, on ait $a_{n_1+\cdots+n_r} \leq$*

$a_{n_1} + \cdots + a_{n_r} + f(n_1) + \cdots + f(n_r)$, alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $[0, +\infty[$.

Démonstration. — Si n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à n_0 et si $l \in \{n, n+1, \cdots, 2n-1\}$, alors

$$\begin{aligned}\frac{a_{pn+l}}{pn+l} &\leq \frac{pa_n + a_l}{pn+l} + \frac{pf(n)+f(l)}{pn+l} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_l}{pn} + \frac{pf(n)+f(l)}{pn+l} \\ &\leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_l}{pn} + \frac{|f(n)|}{n} + \frac{|f(l)|}{pn}.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\max\limits_{n\leq i<2n} a_i}{pn} + \frac{\max\limits_{n\leq i<2n} |f(i)|}{pn} = 0,$$

on obtient que, pour tout entier $n > 0$,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{|f(n)|}{n}, \tag{7}$$

d'où

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{|f(n)|}{n}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Par conséquent, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ a une limite, qui est clairement positive, et est finie d'après (7). □

Corollaire 1.3.2. — *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/n = 0$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

1) il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour toute famille $n_1, \cdots, n_l$ d'entiers supérieurs ou égaux à n_0, on ait $a_{n_1+\cdots+n_r} \geq a_{n_1} + \cdots + a_{n_r} - f(n_1) - \cdots - f(n_r)$,

2) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $a_n \leq \alpha n$,

alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — On considère la suite formée des nombres réels de la forme $b_n = \alpha n - a_n$. C'est une suite de nombres positifs. Si $n_1, \cdots, n_r$ sont des entiers supérieurs ou égaux à n_0 et si $n = n_1 + \cdots + n_r$, alors

$$\begin{aligned}b_n = \alpha n - a_n &= \alpha\sum_{i=1}^r n_i - a_n \leq \alpha\sum_{i=1}^r n_i - \sum_{i=1}^r \Big(a_{n_i} - f(n_i)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^r \Big(\alpha n_i - a_{n_i} + f(n_i)\Big) = b_{n_1} + \cdots + b_{n_r} + f(n_1) + \cdots + f(n_r).\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.3.1, la suite $(b_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$. Comme $b_n/n = \alpha - a_n/n$, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ a aussi une limite dans $\mathbb{R}$. □

Corollaire 1.3.3. — *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et c_1, c_2 deux constantes positives telles que :*

1) pour tout couple (m,n) d'entiers suffisamment grands, $a_m + a_n \leq a_{m+n} + c_1$,
2) pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \leq c_2 n$,

alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 1.3.2 à la fonction constante f qui prend valeur c_1. □

Lemme 1.3.4. — *Si $f : \mathbb{Z}_{>0} \to [0,+\infty[$ est une application croissante telle que $\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, alors $\lim_{\alpha\to+\infty} 2^{-\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = 0$.*

Démonstration. — Pour tout entier $\alpha \geq 0$, soit $S_\alpha = \sum_{i\geq\alpha} f(2^i)/2^i$. Par la sommation d'Abel, on a

$$\sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = \sum_{i=0}^{\alpha}(S_i - S_{i+1})2^i = S_0 - S_{\alpha+1}2^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} S_i 2^{i-1}.$$

Comme $\lim_{\alpha\to+\infty} S_\alpha = 0$, le terme $2^{-\alpha}\sum_{i=1}^{\alpha} S_i 2^{i-1}$ converge vers 0 lorsque $\alpha \to +\infty$. Cela montre que $\lim_{\alpha\to+\infty} 2^{-\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = 0$. □

Proposition 1.3.5. — *Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to [0,+\infty[$ une application croissante telle que $\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$. S'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout couple (m,n) d'entiers $\geq n_0$, on ait $b_{n+m} \leq b_m + b_n + f(m) + f(n)$, alors la suite $(b_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $[0,+\infty[$.*

Démonstration. — On considère d'abord le cas où $n_0 = 1$. Comme f est une fonction croissante, on obtient que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$,

$$b_{m+n} \leq b_n + b_m + 2f(m+n). \tag{8}$$

Pour tout entier $\alpha \geq 0$, soit $S_\alpha = \sum_{i\geq\alpha} f(2^i)/2^i$. D'après l'hypothèse on a $\lim_{\alpha\to+\infty} S_\alpha = 0$. Si $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $\beta \in \mathbb{N}$ sont tels que $2^\beta \leq n < 2^{\beta+1}$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{2^\alpha n} \leq 2^\alpha b_n + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{\alpha+1-i} f(2^{i-1}n) \leq 2^\alpha b_n + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{\alpha+1-i} f(2^{\beta+i}). \tag{9}$$

Si $p = \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i$, où $\epsilon_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \{0,1,\cdots,k-1\}$ et où $\epsilon_k = 1$, et si $r \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, d'après (8), on a l'inégalité suivante:

$$(10)\quad b_{np+r} \le b_{np}+b_r+2f(np+r) \le \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i b_{2^i n}+b_r+2\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i f\Big(\sum_{j=0}^{i} \epsilon_j 2^j n\Big)+2f(np+r)$$

Compte tenu de l'inégalité (9), on obtient

$$(11)\quad \begin{aligned} b_{np+r} \le \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i b_n + b_r + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) \\ + 2\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i f(2^{i+\beta+2}) + 2f(2^{k+\beta+2}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{b_{np+r}}{np+r} \le \frac{pb_n}{np+r} + \frac{b_r}{np+r} + 2^{-k-\beta} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) \\ + 2^{-k-\beta+1} \sum_{i=0}^{k} f(2^{i+\beta+2}) + 2^{-k-\beta+1} f(2^{k+\beta+2}). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} 2^{-k-\beta} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) = 2^{-k-\beta} \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} f(2^{\beta+j}) 2^{i+1-j} \\ \le \sum_{j=1}^{k} f(2^{\beta+j}) 2^{2-j-\beta} = 4S_{\beta+1}, \end{aligned}$$

on obtient $\dfrac{b_{np+r}}{np+r} \le \dfrac{pb_n}{np+r} + \dfrac{b_r}{np+r} + 4S_{\beta+1} + 2^{-k-\beta+1} \sum_{i=0}^{k+\beta+3} f(2^i)$. D'après le lemme 1.3.4, on a

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{b_m}{m} \le \liminf_{n\to+\infty} \Big(\frac{b_n}{n} + 4S_{\lfloor \log_2 n \rfloor+1}\Big) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Donc la suite $(b_n/n)_{n\ge1}$ est convergente.

Pour le cas général, en appliquant le résultat obtenu à la sous-suite $(b_{n_0k})_{k\ge1}$ et à la fonction $g(k) = f(n_0k)$, on obtient que la suite $(b_{n_0k}/k)_{k\ge1}$ a une limite dans $[0,+\infty[$. D'autre part, si l est un entier tel que $n_0 \le l < 2n_0$, alors, pour tout entier $k \ge 1$, on a l'encadrement

$$(12)\quad b_{n_0(k+2)} - b_{2n_0-l} - f(n_0k+l) - f(2n_0-l) \le b_{n_0k+l} \le b_{n_0k} + b_l + f(n_0k) + f(l).$$

En divisant (12) par n_0k+l, par passage à la limite quand $k\rightarrow+\infty$, on obtient

$$\lim_{k\rightarrow+\infty}\frac{b_{n_0k+l}}{n_0k+l}=\lim_{k\rightarrow+\infty}\frac{b_{n_0k}}{n_0k}.$$

Comme l est arbitraire, la proposition est achevée. □

Corollaire 1.3.6. — *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels, $f:\mathbb{Z}_{>0}\rightarrow\mathbb{R}$ une application croissante et $c>0$ une constante. On suppose que*

1) pour tous les entiers n et m assez grands, on ait $a_{n+m}\geq a_n+a_m-f(n)-f(m)$,
2) $a_n\leq cn$ pour tout entier $n\geq 1$,
3) $\displaystyle\sum_{\alpha\geq 0}f(2^\alpha)/2^\alpha<+\infty$.

Alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — On considère la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que $b_n=cn-a_n$. C'est une suite de nombres réels positifs. Si n et m sont deux entiers assez grands, on a

$$b_{n+m}=c(n+m)-a_{n+m}\leq cn+cm-a_n-a_m+f(n)+f(m)=b_n+b_m+f(n)+f(m).$$

D'après la proposition 1.3.5, la suite $(b_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$. Comme $a_n/n=c-b_n/n$, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet aussi une limite dans $\mathbb{R}$. □

1.4. Quelques faits dans la géométrie algébrique

Soit S un schéma. On appelle *fibré vectoriel* sur S tout $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini. Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur S, on utilise le symbole $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ pour désigner le foncteur

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Schema}/S & \longrightarrow & \mathbf{Ensemble}\\ (p:X\rightarrow S) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c}\text{quotient localement}\\ \text{libre de rang 1 de } p^*V\end{array}\right\}\end{array}\tag{13}$$

On désigne par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ le *fibré canonique* sur $\mathbb{P}(V)$, à savoir l'objet universelle du foncteur reprséntable (13). C'est un fibré inversible sur $\mathbb{P}(V)$. Pour tout entier $m\geq 1$, l'expression $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(m)$ désigne la puissance tensorielle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)^{\otimes m}$.

Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est *ample* (cf. [**22**] II.4.5.5 et [**24**] IV.1.7.14) si, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0>0$ tel que, pour tout entier $n\geq n_0$, $\mathcal{F}\otimes L^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections globales (autrement dit, il existe un entier $a>0$ ainsi qu'un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X^{\oplus a}$ vers $\mathcal{F}\otimes L^{\otimes n}$).

Soit f un morphisme quasi-compact d'un schéma quasi-compact et quasi-séparé X vers un schéma Y. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est *ample relativement* à f (cf. [**22**] II.4.6.1) s'il existe un recouvrement (U_α) de Y par des ouverts affines tel que $L|_{U_\alpha}$ soit ample sur $f^{-1}(U_\alpha)$ pour tout α. Ceci revient à dire que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0>0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n})) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$ soit surjectif (cf. [**22**] II.4.6.8 et [**24**] IV.1.7.15). Si Y est affine, cela équivaut à l'amplitude de L sur X.

Dans [**26**] (voir aussi [**27**]) Hartshorne a étendu la notion d'amplitude aux faisceaux localement libre de rang fini. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est *ample* si pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, le faisceau $S^n E \otimes \mathcal{F}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, c'est-à-dire, soit un quotient d'un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini, où $S^n E$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique de E.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact d'un schéma quasi-compact et quasi-séparé vers un schéma. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est *ample relativement* à f (ou à Y) s'il existe un recouvrement de Y par des ouverts affines (U_α) de telle sorte que $E|_{U_\alpha}$ soit ample sur $f^{-1}(U_\alpha)$ pour tout α. Lorsque Y est localement noethérien et f est de type fini, l'amplitude de E relativement à Y est équivalente à l'amplitude de $\mathcal{O}_E(1)$ relativement à Y.

On rappelle deux résultats classiques concernant les fibrés inversible amples que l'on utlisera plus loin dans le chapitre 4.

Proposition 1.4.1. — *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme surjectif de schémas projectifs définis sur un corps k. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π, alors il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $L \otimes \pi^* M$ soit ample.*

Démonstration. — Comme L est ample relativement à π, il existe un entier $n > 0$, un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini et non-nul E et une immersion $f : X \to \mathbb{P}(E)$ compatible à π tels que $L^{\otimes n} \cong f^*(\mathcal{O}_E(1))$. On désigne par $p : \mathbb{P}(E) \to X$ la projection canonique et considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}(E) \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Comme π est propre, le morphisme f est une immersion fermée. Comme Y est projective, il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $E \otimes M^{\otimes n}$ soit encore ample. On a alors $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E \otimes M^{\otimes n})$, et $\mathcal{O}_{E \otimes M^{\otimes n}}(1) \cong \mathcal{O}_E(1) \otimes p^* M^{\otimes n}$. Comme f est une immersion fermée,

$$(L \otimes \pi^* M)^{\otimes n} = f^*(\mathcal{O}_E(1)) \otimes f^*(p^* M)^{\otimes n} = f^*(\mathcal{O}_E(1) \otimes p^* M^{\otimes n}) \cong f^*(\mathcal{O}_{E \otimes M^{\otimes n}}(1))$$

est ample puisque $E \otimes M^{\otimes n}$ est ample. □

Proposition 1.4.2. — *Soient X un schéma intègre et noethérien, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent sans torsion. Alors il existe deux entiers $a, m > 0$ ainsi qu'un homomorphisme injectif de $\mathcal{F}$ dans $(\mathcal{L}^{\otimes m})^{\oplus a}$.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{F}$ est sans torsion, l'homomorphisme canonique

$$\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$$

est injectif. Comme $\mathcal{L}$ est ample, il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{F}^{\vee}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, i.e., il existe un entier a et un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus a} \to \mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{F}^{\vee}$. Par dualité on obtient un homomorphisme injectif

$$\mathcal{L}^{\vee\otimes m} \otimes \mathcal{F} \xhookrightarrow{1\otimes\theta_{\mathcal{F}}} \mathcal{L}^{\vee\otimes m} \otimes \mathcal{F}^{\vee\vee} \xhookrightarrow{\varphi^{\vee}} \mathcal{O}_X^{\oplus a}$$

qui induit un homomorphisme injectif $\mathcal{F} \to (\mathcal{L}^{\otimes m})^{\oplus a}$. □

CHAPITRE 2

FILTRATIONS DE HARDER-NARASIMHAN

Les notions de *filtration de Harder-Narasimhan* et de *polygone de Harder-Narasimhan* d'un fibré vectoriel sur une courbe projective lisse sont introduites par Harder et Narasimhan [**25**]. Leurs avatars en géométrie d'Arakelov sont dévélopés par Stuhler [**36**] et Grayson [**21**] pour les fibrés vectoriels hermitiens. Récemment É. Gaudron [**19**] a généralisées ces notions dans un cadre plus général des fibrés adéliques hermitiens.

Classiquement la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est un drapeau de $\mathcal{E}$ dont les sous-quotients sont semi-stables et de pentes strictement décroissantes, et le polygone de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ est une fonction concave et linéaire par morceaux définie sur $[0, \operatorname{rg} E]$ dont les pentes successives sont les pentes des sous-quotients dans la filtration de Harder-Narasimhan. En géométrie d'Arakelov, le polygone de Harder-Narasimhan est un invariant arithmétique très général qui permet de considérer toutes les pentes d'un fibré vectoriel (ou adélique) hermitien en même temps (cf. [**3**] et [**19**]).

Dans ce chapitre, on introduit un nouveau point de vue de cette théorie. À chaque fibré adélique hermitien, on associe une $\mathbb{R}$-filtration de l'espace vectoriel sous-jacent, qui mémorise en même temps le drapeau et les pentes successives. On vérifie que le polygone associé à cette $\mathbb{R}$-filtration coïncide avec une forme normalisée du polygone de Harder-Narasimhan du fibré adélique hermitien. Ce résultat nous permet d'utiliser la méthode des $\mathbb{R}$-filtrations et des mesures à étudier les fibrés adéliques hermitiens.

On rappelle que le symbole K désigne un corps de nombres, comme convenu dans §1.1.

2.1. Fibrés adéliques hermitiens

Les fibrés vectoriels adéliques, notamment les fibrés vectoriels hermitiens sont des objects fondamentaux de la théorie des pentes. Depuis l'article fondateur [**3**] de J.-B. Bost, les fibrés vectoriels adéliques ainsi que leurs invariants arithmétiques ont été systématiquement étudiés dans une série d'articles tels que [**4, 12, 5, 19**]. Dans cette section, on rappelle des notions basiques de cette théorie et des résultats classiques que l'on aura beseoin dans la suite. Voir [**19**] pour une présentation complète et détaillée.

2.1.1. Fibrés vectoriels adéliques. —

Définition 2.1.1. — On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} K$ toute donnée $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty})$ d'un espace vectoriel E de rang fini sur K et d'une famille de normes $\|\cdot\|_v$ sur $E\otimes_K \mathbb{C}_v$, soumise aux conditions suivantes :

1) Pour tout élément $s\in E$, il existe un sous-ensemble fini S de Σ_f tel que $\|s\|_{\mathfrak{p}} = 1$ quel que soit $\mathfrak{p}\in\Sigma_f\setminus S$.
2) Pour toute place $v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty$, la norme $\|\cdot\|_v$ est invariante sous l'action de $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$. Plus précisément, si $(s_1,\cdots,s_r)$ est une base de E_{K_v} sur K_v et si $a_1,\cdots,a_r$ sont des éléments dans $\mathbb{C}_v$, alors $\|\tau(a_1)s_1+\cdots+\tau(a_r)s_r\|_v = \|a_1s_1+\cdots+a_rs_r\|_v$ quel que soit $\tau\in\operatorname{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$.
3) Si $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$, alors la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ est *ultramétrique*, c'est-à-dire $\|s+s'\|_{\mathfrak{p}} \le \max(\|s\|_{\mathfrak{p}}, \|s'\|_{\mathfrak{p}})$.

Le fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ est dit *nul* si son espace vectoriel sous-jacent E est nul. En outre, le *rang* de $\overline{E}$ est par définition le rang de E sur K. Un fibré vectoriel adélique de rang 1 s'appelle aussi un *fibré inversible adélique*.

Remarque 2.1.2. — Ici notre condition 1) est équivalente à la condition 1) de [**19**] Définition 3.1 :

> *il existe une base $(s_1,\cdots,s_r)$ de E sur K et une partie finie S de Σ_f telles que, $\|a_1s_1+\cdots+a_rs_r\|_v = \max(|a_1|_v,\cdots,|a_r|_v)$ quel que soient $v\in\Sigma_f\setminus S$ et $(a_1,\cdots,a_r)\in\mathbb{C}_v^r$,*

sachant que les normes correspondant aux places finies sont ultramétiques.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique non-nul sur $\operatorname{Spec} k$. On définit la *boule unité* de $\overline{E}$ comme le sous-ensemble $\mathbb{B}(\overline{E})$ de $E\otimes_K \mathbf{A}_K$ des éléments $(s_v)_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty}$ tels que $\|s_v\|_v\le 1$ quel que soit $v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty$. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* de $\overline{E}$ est par définition le nombre réel

$$\chi(\overline{E}) := \log(\operatorname{vol}(\mathbb{B}(\overline{E}))) - \log(\operatorname{covol}(E)), \tag{14}$$

où vol est une mesure de Haar quelconque sur $E\otimes_K \mathbf{A_K}$, et $\operatorname{covol}(E)$ est le covolume de E pour cette mesure, c'est-à-dire la mesure pour vol d'un domaine fondamental du quotient $(E\otimes_K \mathbf{A_K})/E$. Cette définition ne dépend pas du choix de la mesure de Haar vol. En particulier, on a l'égalité

$$\chi(\overline{E}) = \log(\mathbf{m}_E(\mathbb{B}(\overline{E}))) - \operatorname{rg}(E)\log\sqrt{|D_K|}, \tag{15}$$

où $\mathbf{m}_E$ est la mesure de Haar définie dans §1.1.

Pour tout entier $r \geq 1$, soit $\overline{K}^r = (K^r, (\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty})$ l'espace vectoriel de rang r sur K muni des métriques qui "proviennent de celles de K". Plus précisément, si on désigne par $(e_1, \cdots, e_r)$ la base canonique de K^r, alors pour toute place v de K et tous les éléments $a_1, \cdots, a_r$ dans $\mathbb{C}_v$, on a

$$\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|_v = \begin{cases} \max(|a_1|_v, \cdots, |a_r|_v), & \text{si } v \in \Sigma_f, \\ \sqrt{|a_1|_v^2 + \cdots + |a_r|_v^2}, & \text{si } v \in \Sigma_\infty. \end{cases}$$

$\overline{K}^r$ est donc un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$, appelé le *fibré vectoriel adélique trivial* de rang r sur $\operatorname{Spec} K$.

Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique de rang $r > 0$ sur $\operatorname{Spec} K$, on définit le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ comme la différence

$$\widehat{\deg}\overline{E} := \chi(\overline{E}) - \chi(\overline{K}^r) = \log(\mathrm{vol}(\mathbb{B}(\overline{E}))) - \log(\mathrm{vol}(\mathbb{B}(\overline{K}^r))). \tag{16}$$

Sa version normalisée est par définition $\widehat{\deg}_n(\overline{E}) = \dfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}(\overline{E})$. La *pente* de $\overline{E}$ est définie comme le quotient $\widehat{\mu}(\overline{E}) := \widehat{\deg}_n(\overline{E})/\operatorname{rg} E$. En particulier, le degré d'Arakelov d'un fibré vectoriel adélique trivial sur $\operatorname{Spec} K$ est nul. Enfin, si $\overline{E}$ est nul, alors son degré d'Arakelov et sa pentes sont nuls par convention.

Proposition 2.1.3. — *La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\overline{K}^r$ est*

$$\chi(\overline{K}^r) = (\#\Sigma_{\infty,r})\log V_r + (\#\Sigma_{\infty,c})(\log V_{2r} + r\log 2) - r\log\sqrt{|\Delta_K|},$$

où V_n est le volume euclidien standard du disque unité dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la formule (15) ainsi que la définition de $\mathbf{m}_E$. □

Remarque 2.1.4. — D'après [**19**] (10), on a

$$\log V_n = n(\log V_1 + \Gamma(3/2)) - \Gamma(1+n/2) = -\frac{n}{2}\log n + O(n).$$

On en déduit donc

$$\chi(\overline{K}^r) = -\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} r\log r + O(r) \tag{17}$$

puisque $\#\Sigma_{\infty,r} + 2\#\Sigma_{\infty,c} = [K:\mathbb{Q}]$.

Si $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique et si s est un élément non-nul de L, alors le degré d'Arakelov de $\overline{L}$ se calcule comme ci-dessous :

$$\widehat{\deg}(\overline{L}) = -\sum_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty} n_v \log\|s\|_v. \tag{18}$$

Si $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ sont deux fibrés inversibles adéliques, alors leur produit tensoriel $\overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2$ est par définition le fibré inversible adélique dont l'espace vectoriel sous-jacent est

$L_1 \otimes L_2$ et dont les métriques satisfont $\|s_1 \otimes s_2\|_v = \|s_1\|_v \|s_2\|_v$ quel que soit v. La formule (18) implique que

$$\widehat{\deg}(\overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2) = \widehat{\deg}(\overline{L}_1) + \widehat{\deg}(\overline{L}_2) \tag{19}$$

Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} K$. Si $\varphi : E \to F$ est une application K-linéaire, alors elle induit pour chaque place $v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$ une application $\mathbb{C}_v$-linéaire $\varphi_v : E \otimes_K \mathbb{C}_v \to F \otimes_K \mathbb{C}_v$ par extension de scalaire. On définit la hauteur de φ comme la somme normalisée

$$h(\varphi) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty} n_v \log \|\varphi_v\|_v, \tag{20}$$

où $\|\varphi_v\|_v$ est la norme d'opérateur linéaire.

2.1.2. Inégalité de pentes. — La proposition suivante est une inégalité de pentes. Voir [**19**] Lemmes 6.2 et 6.3 pour une preuve. Cette inégalité nous permet de comparer les pentes lorsque l'on change les métriques d'un fibré vectoriel adélique.

Proposition 2.1.5. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques de rang $r > 0$ sur $\operatorname{Spec} K$. Si $\varphi : E \to F$ est un isomorphisme K-linéaire, alors*

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{F}) + h(\varphi). \tag{21}$$

Si de plus $r = 1$, alors l'inégalité (21) est en fait une égalité.

La *pente maximale* de $\overline{E}$ est la valeur maximale des pentes des sous-fibrés vectoriels adéliques (c'est-à-dire sous-espace de E muni des métriques induites) non-nuls de $\overline{E}$, notée $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Par convention $\widehat{\mu}_{\max}(0) = -\infty$. L'existence de la pente maximale est justifiée dans [**19**] proposition 5.3. On rappelle ici une inégalité dans le lemme 6.4 *loc. cit.* qui compare les pentes maximales de la source et du but d'un homomorphisme injectif.

Proposition 2.1.6. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques et $\varphi : E \to F$ une application K-linéaire injective. Alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi). \tag{22}$$

2.1.3. Fibrés adéliques hermitiens. — On dit qu'un fibré vectoriel adélique $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty})$ sur $\operatorname{Spec} K$ est un *fibré adélique hermitien* si, pour chaque place infinie $v \in \Sigma_\infty$, la norme $\|\cdot\|_v$ est induite par une forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle_v$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$. Par définition, les fibrés inversibles adéliques sont des fibrés adéliques hermitiens. Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés adéliques hermitiens, on appelle *homomorphisme* de $\overline{E}$ vers $\overline{F}$ toute application K-linéaire de E vers F.

Remarque 2.1.7. — Dans la littérature, la notion de *fibré vectoriel hermitien* sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est plus couramment utilisée. Un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif $\mathcal{E}$ et d'une famille de normes hermitiennes

$\|\cdot\|_v$ sur $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathbb{C}_v$, invariantes par la conjugaison complexe si la place v est rélle (c'est-à-dire que, si v est réelle, alors $\|\cdot\|_v$ est induite par une norme euclidienne sur $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K,v}\mathbb{R}$). Une autre définition équivalente est la donnée $(\mathcal{E},(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\rightarrow\mathbb{C}})$ d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif $\mathcal{E}$ et d'une famille de métriques $\|\cdot\|_\sigma$ indexées par les plongement de K dans $\mathbb{C}$, invariantes par la conjugaison complexe (on tient compte aussi de l'action de la conjugaison complexe sur les plongements). Soit $E=\mathcal{E}_K$. Pour chaque place finie $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$, la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur $\mathcal{E}$ induit une norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur $E\otimes_K\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$:

$$\|s\|_{\mathfrak{p}}=\inf\big\{|a|_{\mathfrak{p}}\;\big|\;a\in\mathbb{C}_{\mathfrak{p}},\ s\in a(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}})\big\},$$

où $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau de valuation $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $(E,(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty})$ est un fibré adélique hermitien sur $\operatorname{Spec}K$.

Réciproquement, étant donné un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}K$, on peut en déduire une structure entière sur une localisation de $\mathcal{O}_K$. En effet, soit S la partie finie de Σ_f comme dans la remarque 2.1.2. Soient U le sous-schéma ouvert dense de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ le complémentaire de S et $\mathcal{O}_U$ l'anneau de U. L'ensemble

$$\mathcal{E}=\{x\in E\mid\forall\mathfrak{p}\in\Sigma_f\setminus S,\ \|x\|_{\mathfrak{p}}\leq 1\}$$

est un $\mathcal{O}_U$-module projectif de type fini et, pour chaque $\mathfrak{p}\in\Sigma_f\setminus S$, la norme sur $E\otimes_K\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ induite par la structure entière de $\mathcal{E}$ coïncide avec $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$. Ainsi le fibré adélique hermitien $\overline{E}$ peut être considéré comme un fibré vectoriel hermitien sur U si on prétend que les places dans S sont “infinies”.

Étant donné un fibré adélique hermitien $\overline{E}$, les *sous-fibrés adéliques hermitiens* et les *quotients adéliques hermitiens* sont naturellement définis. Un sous-fibré adélique hermitien est la donnée $\overline{F}$ d'un sous-espace vectoriel F de E muni des métriques induites. L'espce quotient E/F et les métriques quotientes forment aussi un fibré adélique hermitien sur $\operatorname{Spec}K$, noté $\overline{E}/\overline{F}$. Le diagramme $0\longrightarrow\overline{F}\longrightarrow\overline{E}\longrightarrow\overline{E}/\overline{F}\longrightarrow 0$ est appelé une suite exacte courte de fibrés adéliques hermitiens.

Plusieurs constructions algébriques sont “canoniquement” définies pour les fibrés adéliques hermitiens, notamment la *somme directe* et le *produit tensoriel* de deux fibrés adéliques hermitiens, ainsi que le *dual*, les *puissances symétriques* et les *puissances extérieures* d'un fibré adélique hermitien. En particulier, le *déterminant* d'un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ est par définition la puissance extérieure $\operatorname{dét}\overline{E}:=\Lambda^{\operatorname{rg}E}\overline{E}$. De plus, on a $\widehat{\deg}_n(\overline{E})=\widehat{\deg}_n(\operatorname{dét}\overline{E})$. D'autre part, $\widehat{\deg}_n(\overline{E})+\widehat{\deg}_n(\overline{E}^\vee)=0$, où $\overline{E}^\vee$ est le dual de $\overline{E}$.

Si $0\longrightarrow\overline{F}\longrightarrow\overline{E}\longrightarrow\overline{G}\longrightarrow 0$ est une suite exacte courte de fibrés adéliques hermitiens, alors $\operatorname{dét}\overline{E}$ est canoniquement isomorphe à $\operatorname{dét}\overline{F}\otimes\operatorname{dét}\overline{G}$, d'où

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E})=\widehat{\deg}_n(\overline{F})+\widehat{\deg}_n(\overline{G}).\tag{23}$$

Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés adéliques hermitiens, alors $\text{dét}(\overline{E}\otimes\overline{F})$ est isomorphe à $(\text{dét}\overline{E})^{\otimes \operatorname{rg} F}\otimes(\text{dét}\overline{F})^{\otimes \operatorname{rg} E}$. Par conséquent,

$$\widehat{\deg}(\overline{E}\otimes\overline{F}) = \operatorname{rg} F\widehat{\deg}(\overline{E}) + \operatorname{rg} E\widehat{\deg}(\overline{F}). \tag{24}$$

Les égalités de degrés d'Arakelov (23) et (24) impliquent les égalités suivantes de pentes

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{\operatorname{rg} F}{\operatorname{rg} E}\widehat{\mu}(\overline{F}) + \frac{\operatorname{rg} G}{\operatorname{rg} E}\widehat{\mu}(\overline{G}), \tag{25}$$

$$\widehat{\mu}(\overline{E}\otimes\overline{F}) = \widehat{\mu}(\overline{E}) + \widehat{\mu}(\overline{F}), \tag{26}$$

pourvu que tous les fibrés adéliques hermitiens sont non-nuls.

2.1.4. Inégalité de pentes des fibrés adéliques hermitiens. — La *pente minimale* d'un fibré adélique hermitien non-nul $\overline{E}$ est la valeur minimale des pentes de ses quotients adéliques hermitiens non-nuls, notée $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$. Par définition on a la relation $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. En outre, $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$. On note par convention $\widehat{\mu}_{\min}(0) = +\infty$.

Remarque 2.1.8. — Dans [**19**], la pente minimale est aussi introduite pour un fibré vectoriel adélique. Mais l'égalité $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$ n'est plus vraie en général.

Étant donné un homomorphisme non-nul de fibrés adéliques hermitiens sur $\operatorname{Spec} K$, les diverses pentes de la source et du but se comparent par les inégalités de pentes :

Proposition 2.1.9. — *Soit $\varphi : \overline{E} \to \overline{F}$ un homomorphisme non-nul de fibrés adéliques hermitiens. Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

1) $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi)$.
2) Si φ est injectif, alors $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi)$.
3) Si φ est surjectif, alors $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) + h(\varphi)$.

Démonstration. — 2) est un cas particulier de la proposition 2.1.6. Si on applique 2) à $\varphi^\vee : \overline{F}^\vee \to \overline{E}^\vee$ on obtient 3). On désigne par $\overline{G}$ l'image de E par φ munie des métrique induite. En appliquant 3) à l'homomorphisme canonique $\overline{E} \to \overline{G}$, on obtient $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \le \widehat{\mu}_{\min}(\overline{G}) + h(\varphi) \le \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi)$, qui démontre 1). □

2.1.5. Pente minimale du produit tensoriel. — On rappelle une estimation de la pente minimales du produit tensoriel d'un nombre fini de fibrés adéliques hermitiens établie dans [**14**].

Proposition 2.1.10. — *Soit $(\overline{E}_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de fibrés adéliques hermitiens non-nuls sur* $\operatorname{Spec} K$. *L'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n) \ge \sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_i) - \log(\operatorname{rg} E_i)\Big). \tag{27}$$

Remarque 2.1.11. — 1) Dans [**14**] theorem 1.1, l'auteur a montré que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{E}_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log(\operatorname{rg} E_i) \Big).$$

Si on applique ce résultat à la famille $(\overline{E}_i^{\vee})_{1 \leq i \leq n}$, en s'appuyant sur l'égalité $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{\vee}) = -\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$, on obtient (27).

2) Dans [**14**], les estimations sont obtenus dans le cadre des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, mais ces estimations reste valables pour le cas général des fibrés adéliques hermitiens avec le même terme d'erreur. En effet, il s'agit là d'un argument dans la théorie classique des invariants et de l'inégalité de pentes, qui sont tous les deux valables dans le cadre adélique.

2.1.6. Comparaison des fibrés vectoriels adéliques aux fibrés adéliques hermitiens. — Soit V un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur $\mathbb{C}$. Soit $r = \operatorname{rg}(V)$. Les normes sur V se comparent aux normes hermitiennes via l'*ellipsoïde de John* et l'*ellipsoïde de Löwner* (cf. [**19**] définition-théorème 2.4, voir aussi [**37**] Page 84). Plus précisément, si $\|\cdot\|$ est une norme sur V, alors il existe deux normes hermitiennes $\|\cdot\|_{\mathrm{John}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{Löwner}}$ telles que

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\|x\|_{\mathrm{John}} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\mathrm{John}}, \quad \text{et} \quad \|x\|_{\mathrm{Löwner}} \leq \|x\| \leq \sqrt{r}\|x\|_{\mathrm{Löwner}} \tag{28}$$

quel que soit $x \in V$. On en déduit la comparaison suivante des fibrés vectoriels adéliques aux fibrés adéliques hermitiens :

Proposition 2.1.12. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique de rang $r > 0$ sur $\operatorname{Spec} K$. Il existe deux fibrés adéliques hermitiens $\overline{E}_{\mathrm{John}}$ et $\overline{E}_{\mathrm{Löwner}}$ dont les espaces vectoriels sous-jacents s'identifient tous à E et tels que,*

1) la hauteur de l'application d'identité $\overline{E} \to \overline{E}_{\mathrm{John}}$ est contenue dans $[0, \log\sqrt{r}]$;
2) la hauteur de l'application d'identité $\overline{E} \to \overline{E}_{\mathrm{Löwner}}$ est contenue dans $[-\log\sqrt{r}, 0]$.

Démonstration. — On suppose $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v))$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$, soient $\|\cdot\|'_{\mathfrak{p}} = \|\cdot\|''_{\mathfrak{p}} = \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$. Si v est une place infinie, on note $\|\cdot\|'_v = \|\cdot\|_{v,\mathrm{John}}$ et $\|\cdot\|''_v = \|\cdot\|_{v,\mathrm{Löwner}}$. Enfin, soient $\overline{E}_{\mathrm{John}} = (E, (\|\cdot\|'_v))$ et $\overline{E}_{\mathrm{Löwner}} = (E, (\|\cdot\|''_v))$. La proposition résulte alors des inégalités dans (28). □

2.2. Filtration et polygone de Harder-Narasimhan

Dans cette section, on rappelle d'abord la notion de semi-stabilité et celle du drapeau de Harder-Narasimhan pour un fibré adélique hermitien, puis introduit la filtration de Harder-Narasimhan indexée par $\mathbb{R}$. Un lien explicite avec la notion classique est ensuite établi.

2.2.1. Semi-stabilité et drapeau de Harder-Narasimhan. — On dit qu'un fibré adélique hermitien non-nul $\overline{E}$ est *semi-stable* si $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E})$, ou de façont équivalente, $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E})$.

D'après [**19**] Proposition 5.3, il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces non-nuls F de E tel que $\widehat{\mu}(\overline{F}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. D'autre part, si F_1 et F_2 sont deux tels sous-espaces, alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \overline{F_1 \cap F_2} \longrightarrow \overline{F}_1 \oplus \overline{F}_2 \longrightarrow \overline{F_1 + F_2} \longrightarrow 0$$

implique que

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_n(\overline{F_1 + F_2}) &= \widehat{\deg}_n(\overline{F}_1) + \widehat{\deg}_n(\overline{F}_2) - \widehat{\deg}_n(\overline{F_1 \cap F_2}) \\ &\geq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})(\operatorname{rg} F_1 + \operatorname{rg} F_2 - \operatorname{rg}(F_1 \cap F_2)),\end{aligned}$$

et on obtient donc $\widehat{\mu}(\overline{F_1 + F_2}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Cela montre l'existence d'un plus grand sous-espace E_{des} de E tel que $\widehat{\mu}(\overline{E}_{\mathrm{des}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Par définition, $\overline{E}_{\mathrm{des}}$ est semi-stable, et $\overline{E}_{\mathrm{des}} = \overline{E}$ si et seulement si $\overline{E}$ est semi-stable. Si ce n'est pas le cas, on dit que $\overline{E}_{\mathrm{des}}$ est le sous-fibré adélique hermitien qui *déstabilise* $\overline{E}$. Par récurrence on obtient un drapeau de E :

$$E = E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_d = 0 \tag{29}$$

tel que $\overline{E_i/E_{i+1}} = (\overline{E/E_{i+1}})_{\mathrm{des}}$ quel que soit $i \in \{0, \cdots, d-1\}$. Ce drapeau est appelé le *drapeau de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$. Par définition, les sous-quotients $\overline{E_i/E_{i+1}}$ sont semi-stables. En outre, si on note $\mu_i = \widehat{\mu}(\overline{E_i/E_{i+1}})$, alors on a les (in)égalités :

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_{d-1} = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}). \tag{30}$$

Les nombres μ_i sont appelés les *pentes successives* de $\overline{E}$.

2.2.2. Filtration de Harder-Narasimhan. — La donnée du drapeau de Harder-Narasimhan (29) et des pentes successives (30) déterminent une $\mathbb{R}$-filtration notée $\mathcal{F}^{\overline{E}}$ de E telle que $\mathcal{F}^{\overline{E}}_s E = \bigcup_{0 \leq i < d,\ \mu_i \geq s} E_i$ (cf. §1.2.1 *infra*), appelée la *filtration de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$. Par définition, on a

$$\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{\overline{E}}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\max}(\mathcal{F}^{\overline{E}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}), \tag{31}$$

où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont définies dans (3).

Si $\overline{E} = 0$, alors par convention $\mathcal{F}^0$ est l'unique filtration de l'espace nul. Les égalités dans (31) sont encore valides.

Proposition 2.2.1. — *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{F}^{\overline{E}}_s E}) \geq s$.*

Démonstration. — La proposition est évidente si $\mathcal{F}^{\overline{E}}_s E = 0$. Dans la suite, on suppose que $\mathcal{F}^{\overline{E}}_s$ est non-nul, d'où l'espace E est lui-même non-nul. Soit le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ comme dans (29). Soit $i \in \{0, \cdots, d\}$ tel que $\mathcal{F}^{\overline{E}}_s E = E_i$. Comme

$\mathcal{F}_s^{\overline{E}}$ est non-nul, $i < d$. Le drapeau $E_i \supsetneq E_{i+1} \supsetneq \cdots \supsetneq E_d$ est le drapeau de Harder-Narasimhan de E_i. Donc $\widehat{\mu}_{\min}(E_i) = \mu_i \geq s$. □

Proposition 2.2.2. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens. Si $\varphi : E \to F$ est une application K-linéaire, alors $\varphi(E)$ est contenue dans $\mathcal{F}^{\overline{F}}_{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})-h(\varphi)}F$.*

Démonstration. — Le cas où $\varphi = 0$ est trivial. On suppose alors que φ est non-nul. Soit $F = F_0 \supsetneq F_1 \supsetneq \cdots \supsetneq F_m = 0$ le drapeau de Harder-Narasimhan de F. Soit i le plus grand indice dans $\{0, \cdots, m\}$ tel que $\varphi(E) \subset F_i$. Comme φ est non-nul, $i < m$. Soit ψ l'homomorphisme composé $E \xrightarrow{\varphi} F_i \longrightarrow F_i/F_{i+1}$ où la dernière flèche est la projection canonique. L'homomorphisme ψ est non-nul car l'image de E par φ n'est pas contenue dans F_{i+1}. Par l'inégalité de pentes (proposition 2.1.9 3)), on obtient

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F_i/F_{i+1}}) + h(\varphi) = \widehat{\mu}(\overline{F_i/F_{i+1}}) + h(\varphi).$$

On en déduit $F_i = \mathcal{F}^{\overline{F}}_{\widehat{\mu}(\overline{F_i/F_{i+1}})}F \subset \mathcal{F}^{\overline{F}}_{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})-h(\varphi)}F$. □

Corollaire 2.2.3. — *Pour tout fibré adélique hermitien non-nul $\overline{E}$, on a*

$$\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E = \sum_{\substack{0\neq F\subset E\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})\geq s}} F. \tag{32}$$

Démonstration. — D'une part, la proposition 2.2.2 montre que, si $F \subset E$ est un sous-espace non-nul tel que $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \geq s$, alors F est contenu dans $\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E$, sachant que l'application d'inclusion de F dans E est de hauteur negative ou nulle. D'autre part, la proposition 2.2.1 affirme que $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E}) \geq s$. Donc $\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E$ est en fait le plus grand sous-espace G de E tel que $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{G}) \geq s$, d'où (32). □

La proposition suivante compare les filtrations de Harder-Narasimhan de deux fibrés adéliques hermitiens.

Proposition 2.2.4. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens sur* Spec K. *Soit $\varphi : E \to F$ une application K-linéaire. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'image de $\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E$ par φ est contenu dans $\mathcal{F}^{\overline{F}}_{s-h(\varphi)}F$. Autrement dit, $\lambda_{\mathcal{F}^{\overline{F}}}(\varphi(x)) \geq \lambda_{\mathcal{F}^{\overline{E}}}(x) - h(\varphi)$ quel que soit $x \in E$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.2.1, $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E}) \geq s$. On obtient donc $\varphi(\mathcal{F}_s^{\overline{E}}E) \subset \mathcal{F}^{\overline{F}}_{s-h(\varphi)}F$ compte tenu de la proposition 2.2.2. □

Définition 2.2.5. — On désigne par $\nu_{\overline{E}}$ la mesure $\nu_{\mathcal{F}^{\overline{E}}}$, appelée la *mesure associée* à $\overline{E}$. Si E est non-nul, alors $\nu_{\overline{E}}$ est une mesure de probabilité.

Corollaire 2.2.6. — *Si $\overline{E}$ et $\overline{E}'$ sont deux fibrés adéliques hermitiens et si $\varphi : E \to E'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K, alors $\tau_{-h(\varphi)}\nu_{\overline{E}'} \succ \nu_{\overline{E}}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 2.2.4 et du lemme 1.2.6. □

2.2.3. Polygone de Harder-Narasimhan. — Étant donné un fibré adélique hermitien non-nul $\overline{E}$, on désigne par $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ la fonction définie sur $[0,1]$ dont le graphe est l'enveloppe convexe des points $\left(\dfrac{\operatorname{rg} F}{\operatorname{rg} E}, \widehat{\mu}(\overline{F})\right)$, où F parcourt tous les sous-espaces de E. La fonction $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ est un polygone, appelé le *polygone de Harder-Narasimhan* (normalisé) de $\overline{E}$. Si le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ est (29) et si les pentes successives de $\overline{E}$ sont comme dans (30), alors les sommets de $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ sont de coordonnés $\left(\frac{\operatorname{rg} E_i}{\operatorname{rg} E}, \widehat{\mu}(\overline{E}_i)\right)$, et les pentes de $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ coïncident avec les μ_i. On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 2.2.7. — *Le polygone de Harder-Narasimhan normalisé de $\overline{E}$ coïncide avec $\mathcal{P}(\nu_{\overline{E}})$, le polygone associé à la mesure $\nu_{\overline{E}}$ défini dans §1.2.5.*

Remarque 2.2.8. — Classiquement le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ est par définition la fonction $\widetilde{\mathcal{P}}_{\overline{E}}$ définie sur $[0, \operatorname{rg} E]$ dont le graphe est l'enveloppe convexe des points $(\operatorname{rg} F, \widehat{\deg}_n(\overline{F}))$, où $\overline{F}$ parcourt tous les sous-espaces vectoriels de E. Autrement dit, on a la relation $\mathcal{P}_{\overline{E}}(t) = \widetilde{\mathcal{P}}_{\overline{E}}(t \operatorname{rg} E)/\operatorname{rg} E$. La version normalisée du polygone de Harder-Narasimhan a deux avantages. Premièrement, les valeurs de $\mathcal{P}_{\overline{E}}$ représente différentes pentes de $\overline{E}$, qui sont plus courramment utilisées que les degrés dans la méthode des pentes. Deuxièmement, les polygones de Harder-Narasimhan normalisés sont tous définis sur le même intervalle $[0,1]$, cela donne la possibilité de comparer les polygones de différents fibrés adéliques hermitiens. La proposition 2.2.7 nous permet d'utiliser les mesures à étudier les polygones de Harder-Narasimhan.

Corollaire 2.2.9. — *Si $\overline{E}$ et $\overline{E}'$ sont deux fibrés adéliques hermitiens et si $\varphi : E \to E'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K, alors $\mathcal{P}_{\overline{E}}(t) \leq \mathcal{P}_{\overline{E}'}(t) - h(\varphi)t$.*

Démonstration. — On a $\mathcal{P}(\tau_{-h(\varphi)}\nu_{\overline{E}'}) \geq \mathcal{P}(\nu_{\overline{E}})$ compte tenu de la proposition 1.2.7 et du corollaire 2.2.6. D'après (6), $\mathcal{P}(\tau_{-h(\varphi)}\nu_{\overline{E}'})(t) = \mathcal{P}(\nu_{\overline{E}'})(t) - h(\varphi)t = \mathcal{P}_{\overline{E}'}(t) - h(\varphi)t$. D'autre part, $\mathcal{P}(\nu_{\overline{E}}) = \mathcal{P}_{\overline{E}}$. On obtient donc $\mathcal{P}_{\overline{E}}(t) \leq \mathcal{P}_{\overline{E}'}(t) - h(\varphi)t$. □

2.3. Cas de corps de fonctions

Il est bien connu que les corps de fonctions et les corps de nombres son très similaires. Étant donné un corps k. Un corps de fonctions est une extension finie du corps $k(T)$ des fractions rationnels à une variable. Un tel corps peut s'écrire comme le corps des fonctions méromorphes sur une courbe projective C définie sur k. La théorie des fibrés vectoriels adéliques sur un corps de fonctions est aussi développée dans [**19**]. Dans cette section, on rappelle la notion de fibré vectoriel adélique et on discute dans ce cadre les filtrations de Harder-Narasimhan. On fixe un corps de fonctions $K' = k(C)$.

2.3.1. Fibré vectoriel adélique sur K'. — Soit Σ' l'ensemble des places de K', qui s'identifie à l'ensemble des points fermés de C. Toutes les places dans Σ' sont non-archimédiennes. Pour chaque $x \in \Sigma'$, on désigne par n_x l'entier $[k(x) : k]$, où $k(x)$ est le corps résiduel de C en x. Soit en outre v_x la valuation discrète de K' correspondant à x. La version logarithmique de la formule de produit pour K' s'énonce comme

$$\forall f \in K'^{\times}, \quad \sum_{x \in \Sigma'} n_x v_x(f) = 0. \tag{33}$$

Soit $|\cdot|_x$ la valeur absolue sur K' telle que $|f|_x = e^{-v_x(f)}$ quel que soit $f \in K'^{\times}$. On désigne par K'_x le complété de K' pour la valeur absoule $|\cdot|_x$ et par $\mathbb{C}'_x$ le complété d'une clôture algébrique de K'_x, où la valeur absolue $|\cdot|_x$ s'étend de façon unique.

Remarque 2.3.1. — Dans [**19**], l'auteur a choisi de travailler dans le cas où le corps k est fini. Dans ce cas-là, il y a un choix canonique de la métrique $|\cdot|_x$ (c'est d'ailleur le cas pour un corps de nombres). Mais le changements de valeurs absolues conduit à une constante supplémentaire (strictement positive) devant les degrés d'Arakelov et les pentes, qui est en fait anodin. Donc les résultats et les démonstrations dans *loc. cit.* sont valables pour k quelconque, quitte à désigner une valeur absolue de l'uniformisante.

Définition 2.3.2. — On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} K'$ toute donnée $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_x)_{x\in\Sigma'})$ d'un espace vectoriel E de rang fini sur K' ainsi qu'une famille de normes ultramétriques $\|\cdot\|_x$ sur $E \otimes_{K'} \mathbb{C}'_x$, soumises aux conditions suivante :

1) Pour tout élément $s \in E$, il exist eun sous-ensemble fini S' de Σ' tel que $\|s\|_x = 1$ quel que soit $x \in \Sigma' \setminus S'$.
2) Pour tout $x \in \Sigma'$, la norme $\|\cdot\|_x$ est invariante sous l'action de $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}'_x/K'_x)$. Plus précisément, si $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de $E_{K'_x}$ sur K'_x et si $a_1, \cdots, a_r$ sont des éléments dans $\mathbb{C}'_x$, alors $\|\tau(a_1)e_1 + \cdots + \tau(a_r)e_r\|_x = \|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|_x$ quel que soit $\tau \in \operatorname{Gal}(\mathbb{C}'_x/K'_x)$.

Le *rang* de $\overline{E}$ est par définition $\operatorname{rg}_{K'} E$. Si $\operatorname{rg}_{K'} E = 1$, on dit que $\overline{E}$ est un *fibré inversible adélique*.

Comme toute place de K' est non-archimédienne, $\overline{E}$ est automatiquement "hermitien". Si $r = \operatorname{rg}_{K'} E$ et si $(s_1, \cdots, s_r)$ est une base de E sur K', alors le *degré d'Arakelov* de E et sa version normalisée sont respectivement

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \sum_{x\in\Sigma'} n_x \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_x \quad \text{et} \quad \widehat{\deg}_n(\overline{E}) = \frac{1}{\deg(C)}\widehat{\deg}(\overline{E}).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la base $(s_1, \cdots, s_r)$, grâce à la formule de produit (33). L'avantage du procédé de normalisation est que, la fonction $\widehat{\deg}_n$

est invariant par toute extension finie du scalaire. Les opérations algébriques sont naturellement définies pour les fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} K'$. En particulier, le déterminant $\det(\overline{E}) := \Lambda^{\operatorname{rg} E}\overline{E}$ satisfait à l'égalité $\widehat{\deg}_n(\det(\overline{E})) = \widehat{\deg}_n(\overline{E})$. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* est définie comme

$$\chi(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{E}) + \operatorname{rg} E(1-g),$$

où g est le genre de C.

Remarque 2.3.3. — Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, et si $E = \mathcal{E}_{K'}$, alors la structure de $\mathcal{O}_C$-module sur $\mathcal{E}$ définit naturellement une famille de ultranormes $\|\cdot\|_x$ sur les $E \otimes_{K'} \mathbb{C}_x$ où $x \in \Sigma'$. On désigne par $\widehat{\mathcal{O}}_x$ l'anneau de valuation dans $\mathbb{C}_x$. La norme $\|\cdot\|_x$ est définie comme

$$\|s\|_x = \inf\big\{|a|_x \;\big|\; a \in \mathbb{C}_x,\ s \in a(\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{C,x}} \widehat{\mathcal{O}}_x)\big\}.$$

On obtient ainsi un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} K'$, et on a la relation $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \deg(\mathcal{E})$.

2.3.2. Pentes, filtration et polygone de Harder-Narasimhan. — Les constructions dans la section précédente, notamment celles des pentes, de filtration et polygone de Hardern-Narasimhan sont valables pour un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K'$. Il suffit de remplaçer dans §2.1.4 et §2.2 les occurences de l'expression “fibré adélique hermitien” par “fibré vectoriel adélique” et celles du symboles “K” par “K'”.

Dans le cadre de la géométrie algébrique sur C, on est plus habitué à la version non-normalisée du degré et des pentes. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel non-nul sur C, qui correpsond à un fibré vectoriel adélique $\overline{\mathcal{E}}_{K'}$ sur $\operatorname{Spec} K'$. On désigne par $\mu(\mathcal{E})$ la *pente* de $\mathcal{E}$, qui est le quotient $\deg(\mathcal{E})/\operatorname{rg}(\mathcal{E})$. Par définition on a la relation $\mu(\mathcal{E}) = \deg(C)\widehat{\mu}(\overline{\mathcal{E}}_{K'})$. Les faits sur les fibrés adéliques que l'on a présentés conduisent à des énoncés analogues dans ce cadre qui sont compatibles aux résultats classiques concernant les fibrés vectoriels sur C. Pour faciliter les lecteurs, on résume quelques constructions et résultats.

Étant donné un fibré vectoriel non-nul $\mathcal{E}$ sur C. La pente maximale et la pente minimale de $\mathcal{E}$ existent. On rappelle que la *pente maximale* $\mu_{\max}(\mathcal{E})$ est la valeur maximale des pentes des sous-fibrés vectoriels de $\mathcal{E}$; et la *pente minimale* $\mu_{\min}(\mathcal{E})$ est la valeur minimale des pentes des quotients localement libres de $\mathcal{E}$. Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est dit *semi-stable* si $\mu(\mathcal{E}) = \mu_{\max}(\mathcal{E})$, ou de façon équivalente, $\mu(\mathcal{E}) = \mu_{\min}(\mathcal{E})$.

Il existe un unique drapeau $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supsetneq \mathcal{E}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{E}_d = 0$ tel que les sous-quotients $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ soient semi-stables et que $\mu(\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1) < \cdots < \mu(\mathcal{E}_{d-1}/\mathcal{E}_d)$. Ce drapeau induit par restriction à la fibre générique un drapeau $\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_{0,K'} \supsetneq \mathcal{E}_{1,K} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{E}_{d,K} = 0$ d'espaces vectoriels sur K'. On en déduit donc (cf. §1.2.1 *infra*) une filtration de $\mathcal{E}_K$, appelée la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$. On désigne par $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ le polygone normalisé correspondant.

Comme expliqué plus haut dans la remarque 2.3.3, le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ détermine un fibré vectoriel adélique $\overline{\mathcal{E}}_{K'}$. On a les relations

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}_{K'}) = \frac{\mu_{\max}(\mathcal{E})}{\deg(C)}, \quad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}_{K'}) = \frac{\mu_{\min}(\mathcal{E})}{\deg(C)} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\overline{\mathcal{E}}_{K'}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}{\deg(C)}. \tag{34}$$

Dans le cadre de la géométrie relative, les inégalités de pentes sont plus simple. Notamment, si $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un homomorphisme non-nul de fibrés vectoriels sur C, alors $\mu_{\min}(\mathcal{E}) \leq \mu_{\max}(\mathcal{F})$. Si φ est injectif, alors $\mu_{\max}(\mathcal{E}) \leq \mu_{\max}(\mathcal{F})$. Si φ est surjectif, alors $\mu_{\min}(\mathcal{E}) \leq \mu_{\min}(\mathcal{F})$.

CHAPITRE 3

CONVERGENCE DES POLYGONES

Dans ce chapitre on établit la convergence uniforme des polygones associés à une algèbre graduée dont chaque composante homogène est munie d'une $\mathbb{R}$-filtration. Deux stratégies radicalement différentes sont proposées. La première est inspirée par un travail de Faltings et Wüstholz [**17**] qui remonte à l'idée très classique de séries de Poincaré. Cette approche, qui permet de calculer explicitement la limite des polygones, se restreint cependent au cas d'algèbre $\mathbb{N}^2$-bigraduée, c'est-à-dire au cas où les filtrations sont induites par une autre graduation. Ce cas particulier est loin d'être suffisant pour les applications arithmétiques car déjà les pentes successsives d'un fibré adélique hermitien, qui décrivent les points de saut de sa filtration de Harder-Narasimhan, ne sont pas nécessairement des entiers, autrement dit, en général la filtration de Harder-Narasimhan ne peut pas être induite par une $\mathbb{Z}$-graduation. D'autre part, même si dans certains cas particuliers les pentes successives sont des entiers, il est peu plausible d'espérer que la structure d'algèbre de l'algèbre qui nous intéresse soit compatible aux graduations induites par les filtrations de Harder-Narasimhan. L'une des difficultés majeures pour étendre cette approche au cas général est l'absense de finitude de l'algèbre bigraduée associée à une algèbre graduée munie des filtrations. Pour surmonter cette difficulté, on adopte la deuxième stratégie qui consiste à montrer que les mesures associées aux filtrations que l'on considère vérifient une sur-additivité. En s'appuyant sur les généralisations du lemme de Fekete établies dans §1.3, on obtient la convergence vague des mesures dilatées et en déduit la convergence uniforme des polygones normalisés.

On fixe dans ce chapitre un corps k. Toutes les algèbres sont supposées sur k.

3.1. Cas de modules bigradués

Dans cette section, on présente la théorie des séries de Poincaré à deux variables qui est similaire à la théorie classique (cf. [**11**] VIII §4). On étudie ensuite le comportement asymptotique de ces séries de Poicaré et en déduit le comportement asymptotique des polygones associés.

On entend par *algèbre bigraduée* toute k-algèbre commutative $\mathbb{N}^2$-graduée. Autrement dit, une algèbre bigraduée A est une somme directe $A = \bigoplus_{(n,d)\in\mathbb{N}^2} A_{n,d}$ d'espaces vectoriels sur k, munie d'une structure de k-algèbre unifère telle que $A_{n,d}A_{n',d'} \subset A_{n+n',d+d'}$.

Pour munir une algèbre de polynôme $k[T_1, \cdots, T_m]$ d'une structure d'algèbre bigraduée, il suffit d'assigner une application $f : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$. Dans ce cas-là, l'élément T_i est homogène de bidegré $f(i)$. Une telle algèbre est notée $k[f]$.

Étant donnée une algèbre bigraduée A. On appelle *A-module bigradué* tout A-module M muni d'une $\mathbb{Z}^2$-graduation en espaces vectoriels sur k telle que, pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(n', d') \in \mathbb{Z}^2$, on ait $A_{n,d}M_{n',d'} \subset M_{n+n',d+d'}$. À partir de M, on peut construire des nouveaux A-modules bigradués en décalant les composantes homogènes : pour tout $(n, d) \in \mathbb{Z}^2$, on désigne par $M(n, d)$ le A-module bigradué tel que $M(n, d)_{n',d'} = M_{n+n',d+d'}$. En outre, les A-modules bigradués et les homomorphismes homogènes forment une catégorie abélienne. Cela nous permet de considérer les suites exactes de A-modules bigradués.

Si A est une algèbre bigraduée de type fini, alors elle est engendrée par un nombre fini d'éléments homogènes $a_1, \cdots, a_m$. Soit $f : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ l'application qui envoie i en le bidegré de a_i. Alors l'homomorphisme surjectif de k-algèbres de $k[f] \cong k[T_1, \cdots, T_m]$ vers A qui envoie T_i en a_i est homogène. Tout A-module bigradué peut donc être considéré comme un $k[f]$-module bigradué, qui est de type fini si M est un A-module de type fini.

On renvoie les lecteurs à [**10**] II §11 pour une présentation plus complète des algèbres graduées et des modules gradués.

3.1.1. Séries de Poincaré à deux variables. — Soient $f = (f_1, f_2)$ une application de $\{1, \cdots, m\}$ vers $\mathbb{N}^2$ et M un $k[f]$-module bigradué de type fini. On appelle *série de Poincaré* de M l'élément $P_M \in \mathbb{Z}[\![X, Y]\!][X^{-1}, Y^{-1}]$ défini par

$$P_M = \sum_{(n,d)\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{rg}_k(M_{n,d})X^nY^d.$$

On note $Q_M = P_M \prod_{i=1}^{m}(1 - X^{f_1(i)}Y^{f_2(i)})$.

La série de Poincaré est additive par rapport aux suites exactes courtes : si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $k[f]$-modules bigradués de type fini, alors $P_M = P_{M'} + P_{M''}$.

La proposition suivante est un analogue d'un résultat classique des séries de Poincaré à une variable.

Proposition 3.1.1. — *Avec les notations au-dessus, on a* $Q_M \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence en m. Si $m = 0$, alors $k[f] = k$. Comme M est un k-module de type fini, $P_M \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. On suppose que la proposition a été démontrée pour les modules bigradués sur une algèbre des polynômes à $m-1$ variables. Soit f' la restriction de f à $\{1, \cdots, m-1\}$. On note $(n_m, d_m) = f(m)$. L'application $T_m : M(-n_m, -d_m) \longrightarrow M$ est un homomorphisme de $k[f]$-modules bigradués. Soit N son noyau (vu comme un sous-$k[f]$-module bigradué de M). La suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow N(-n_m, -d_m) \longrightarrow M(-n_m, -d_m) \longrightarrow M \longrightarrow M/T_mM \longrightarrow 0 .$$

Par conséquent,

$$P_M - X^{n_m}Y^{d_m}P_M = P_{M/T_mM} - X^{n_m}Y^{d_m}P_N.$$

Comme M/T_mM et N sont des $k[f'] = k[f]/(T_m)$-modules bigradués de type fini, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$Q_M = Q_{M/T_mM} - X^{n_m}Y^{d_m}Q_N \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}].$$

□

Remarque 3.1.2. — Dans le cas particulier où $f_1 \equiv 1$, l'algèbre $k[f]$ munie de la première graduation est l'algèbre de polynôme usuellement graduée. On peut également considérer la première graduation de M pour laquelle la $n^{\text{ième}}$ composante homogène de M est $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_{n,d}$. Avec cette graduation, M est un module gradué de type fini sur l'algèbre de polynômes $k[T_1, \cdots, T_m]$ usuellement graduée. Si on désigne par H_M la série de Poincaré classique de M (pour la première graduation), alors on a la relation $H_M(X) = P_M(X, 1)$. La théorie classique des séries de Poincaré affirme qu'il existe $h \in \{0, \cdots, m\}$ tel que $H_M(X)$ s'écrive sous la forme

$$H_M(X) = a_h(X)(1-X)^{-h} + a_{h-1}(X)(1-X)^{-h+1} + \cdots + a_0(X), \tag{35}$$

où $a_0, \cdots, a_h$ sont des éléments dans $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ et a_h est à coefficients positifs, et est non-nul lorsque $M \neq 0$. D'autre part, les valeurs de h et de $a_h(1)$ ne dépendent pas du choix de $(a_0, \cdots, a_h)$. Lorsque $M \neq 0$, la valeur de h coïncide avec la dimension de M (notée $\dim(M)$) et $a_h(1)$ est le nombre d'intersection de M que l'on notera $c(M)$. Si $M = 0$, on note par convention $\dim(M) = -\infty$ et $c(M) = 0$.

Dans la suite, on présente un analogue de la formule (35) pour les séries de Poincaré à deux variables :

Théorème 3.1.3. — *Soient* $f = (f_1, f_2) : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ *une application telle que* $f_1 \equiv 1$ *et* M *un* $k[f]$*-module bigradué de type fini. Alors la série* P_M *peut s'écrire sous la forme*

$$P_M(X,Y) = \sum_{r=0}^{h} \sum_{\substack{\alpha \subset \{1,\cdots,m\} \\ \#\alpha = r}} I_\alpha(X,Y) \prod_{i\in\alpha} (1 - XY^{f_2(i)})^{-1}, \tag{36}$$

où

1) $I_\alpha \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$,

2) si $\#\alpha = h$, I_α *est à coefficients positifs,*

3) si $M \neq 0$, *il existe au moins un* $\alpha \subset \{1, \cdots, m\}$ *de cardinal* h *tel que* $I_\alpha \neq 0$.

Pour simplifier la démonstration du théorème 3.1.3, on introduit la notation suivante : si M est un $k[f]$-module bigradué de type fini satisfaisant à l'assertion du théorème 3.1.3, on dit que M vérifie la condition $\mathbb{P}$, noté $\mathbb{P}(M)$. Avec cette notation, l'énoncé du théorème 3.1.3 se simplifie comme :

pour tout $k[f]$*-module bigradué de type fini* M, *on a* $\mathbb{P}(M)$.

Pour tout entier $m > 0$, soit Θ_m l'ensemble

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq m,\ j > 0\} \cup \{(-\infty, 0)\}.$$

On le munit de la relation lexicographique "$\leq$" comme ci-dessous:

$$(i,j) \leq (i',j') \text{ si et seulement si } i < i' \text{ ou si } i = i',\ j \leq j'.$$

C'est une relation d'ordre. L'ensemble Θ_m est totalement ordonné pour cette relation. On utilisera l'expression "$(i,j) < (i',j')$" pour désigner la condition

$$(i,j) \leq (i',j') \quad \textit{mais} \quad (i,j) \neq (i',j').$$

Lemme 3.1.4. — *Soit* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de* $k[f]$*-modules bigradués de type fini. Alors*

1) $\dim M = \max(\dim M', \dim M'')$,

2)

$$c(M) = \begin{cases} c(M') + c(M''), & \dim M' = \dim M'', \\ c(M'), & \dim M' > \dim M'', \\ c(M''), & \dim M'' > \dim M'. \end{cases}$$

3) $\mathbb{P}(M')$ *et* $\mathbb{P}(M'') \Longrightarrow \mathbb{P}(M)$.

Démonstration. — C'est une conséquence des égalités $P_M = P_{M'} + P_{M''}$ et $H_M = H_{M'} + H_{M''}$. □

Démonstration du théorème 3.1.3. — On raisonne par récurrence en m en commençant par montrer que le théorème est vrai pour le cas où $\dim M \leq 0$. Si M est de dimension ≤ 0, alors la série de Poincaré classique de M, i.e., $H_M(X) = P_M(X, 1)$

est un élément de $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$, et on a $P_M \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Donc la condition $\mathbb{P}(M)$ est vérifiée. Comme $\dim M \leq m$, le théorème est vrai lorsque $m = 0$. On suppose que le théorème est vrai pour les modules bigradués sur une algèbre des polynômes à au plus $m - 1$ variables ($m \geq 1$). Soient $f = (f_1, f_2) : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ une application telle que $f_1 \equiv 1$ et M un $k[f] \cong k[T_1, \cdots, T_m]$-module bigradué de type fini. Soit $d = f_2(m)$. On commence un autre procédé de récurrence en $(\dim M, c(M))$. La conditon $\mathbb{P}(M)$ a été déjà démontrée pour $\dim M \leq 0$. On suppose qu'elle a aussi été prouvée pour le cas où $(\dim M, c(M)) < (r, s)$, où $0 < r \leq m$, $s > 0$. Dans la suite, on démontre $\mathbb{P}(M)$ pour le cas où $(\dim M, c(M)) = (r, s)$. On considère l'homothétie $T_m : M(-1, -d) \longrightarrow M$, qui est un homomorphisme de $k[f]$-modules bigradués. On désigne par f' la restriction de f à $\{1, \cdots, m - 1\}$. Soit N_1 le noyau de T_m (vu comme un sous-$k[f]$-module bigradué de M). C'est un $k[f']$-module bigradué de type fini. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}(N_1)$ est vraie. Soit $M_1 = M/N_1$. D'après le lemme 3.1.4 3), pour démontrer $\mathbb{P}(M)$, il suffit de démontrer $\mathbb{P}(M_1)$. Si $\dim N_1 = \dim N$, alors ou bien $\dim M_1 < \dim M$, ou bien $\dim M_1 = \dim M$ et $c(M_1) = c(M) - c(N_1) < c(M)$. Donc on a toujours $(\dim M_1, c(M_1)) < (\dim M, c(M))$. D'après l'hypothèse de récurrence on obtient $\mathbb{P}(M_1)$. Sinon, $\dim N_1 < \dim N$ et $(\dim M_1, c(M_1)) = (\dim M, c(M))$. Si $\mathbb{P}(M)$ n'était pas vrai, en itérant le procédé comme ci-dessus on obtiendrait une suite croissante de sous-modules homogènes

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots N_j \subset N_{j+1} \subset \cdots \tag{37}$$

de M telle que,

i) $N_j = \operatorname{Ker} T_m^j$,
ii) $\dim N_j < \dim M$,
iii) $M_j := M/N_j$ ne satisfait pas à la condition $\mathbb{P}$, et $(\dim M_j, c(M_j)) = (\dim M, c(M))$.

Comme $k[f]$ est un anneau noethérien, la suite (37) est stationnaire. Autrement dit, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $N_j = N_{j+1}$. Cela montre que l'application d'homothétie $T_m : M_j(-1, -d) \to M_j$ est injective. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_j(-1, -d) \xrightarrow{T_m} M_j \longrightarrow M_j/T_m M_j \longrightarrow 0 .$$

Soit $N' = M_j/T_m M_j$. C'est en fait un $k[f']$-module de type fini. D'après l'hypothèse de récurrence on a $\mathbb{P}(N')$. Enfin, comme $(1 - XY^d)P_{M_j}(X, Y) = P_{N'}(X, Y)$, on obtient $\mathbb{P}(M_j)$. Cela est absurde. Donc la condition $\mathbb{P}(M)$ est vérifée. $\square$

3.1.2. Mesures associées à une série à deux variables. — On associe à chaque série formelle dans $\mathbb{Z}[\![X, Y]\!][X^{-1}, Y^{-1}]$ dont les coefficients sont positifs une suite de mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ et ensuite étudie le comportement asymptotique de ces mesures. On verra plus loin que, si la série formelle que l'on considère est la série de Poincaré d'un module bigradué, alors ces mesures coïncident avec les mesures associées aux filtrations induites par la deuxième graduation.

Soit P une série formelle dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ à coefficients positifs. Alors P s'écrit sous la forme $P(X,Y)=\displaystyle\sum_{(n,d)\in\mathbb{Z}^2}a_{n,d}(P)X^nY^d$. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n(P)=\displaystyle\sum_{d\in\mathbb{Z}}a_{n,d}(P)$, et on désigne par $\nu_{n,P}$ la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$\nu_{n,P}=\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{a_{n,d}(P)}{S_n(P)}\delta_{d/n}. \tag{38}$$

Si $S_n(P)=0$, alors par convention $\nu_{n,P}$ est la mesure nulle.

On s'intéresse à étudier la convergence vague des mesure $\nu_{n,P}$ pour une série de Poincaré à deux variables, c'est-à-dire une série P de la forme (36). Une telle série sous la forme la plus simple est celle dans la proposition au-dessous. Dans ce cas-là la suite des mesures $\nu_{n,P}$ converge vaguement vers une mesure borélienne, qui est l'image directe de la mesure de Lebesgue sur un simplexe par une projection linéaire. On montrera dans le théorème 3.1.7 que la convergence au cas général se déduit naturellement du résultat dans ce cas particulier, et la limite des mesures est une combinaison linéaire d'images directes de mesures de Lebesgue.

Pour tout entier $m\geq 1$, soit Δ_m le simplexe $\Delta_m=\{(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}_+^m \mid y_1+\cdots+y_m=1\}$. Si $\underline{u}=(u_1,\cdots,u_m)$ est un élément dans $\mathbb{R}^m$, on désigne par $\varphi_{\underline{u}}:\Delta_m\to\mathbb{R}$ l'application qui envoie $(y_1,\cdots,y_m)$ en $y_1u_1+\cdots+y_mu_m$ et par $\nu_{\underline{u}}$ l'image directe de la mesure de Lebesgue sur Δ_m (normalisée de sorte que la masse totale est 1) par l'application $\varphi_{\underline{u}}$. C'est une mesure de probabilité. Enfin, soit $\nu_\emptyset$ la mesure nulle par convention.

On fixe dans la suite du sous-paragraphe un entier $m\geq 1$ et un élément $\underline{u}=(u_1,\cdots,u_m)\in\mathbb{N}^m$.

Proposition 3.1.5. — *Si P est une série dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!]$ de la forme*

$$P(X,Y)=\prod_{i=1}^m(1-XY^{u_i})^{-1},$$

alors les mesures boréliennes $\nu_{n,P}$ convergent vaguement vers $\nu_{\underline{u}}$ lorsque $n\to+\infty$.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}P(X,Y)=\prod_{i=1}^m\sum_{n\geq 0}X^nY^{nu_i}&=\sum_{(n,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}X^nY^d\sum_{\substack{(a_1,\cdots,a_m)\in\mathbb{N}^m\\ a_1+\cdots+a_m=n,\\ a_1u_1+\cdots+a_mu_m=d}}1\\ &=1+\sum_{\substack{(n,d)\in\mathbb{Z}^2\\ n>0}}X^nY^d\sum_{\substack{(y_1,\cdots,y_m)\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\\ y_1+\cdots+y_m=1,\\ y_1u_1+\cdots+y_mu_m=d/n}}1.\end{aligned}$$

En outre,

$$S_n(P) = \sum_{\substack{(y_1,\cdots,y_m)\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\\ y_1+\cdots+y_m=1}} 1.$$

Pour tout entier $n>0$, soit $\eta_{n,P}$ la mesure sur Δ_m définie par

$$\eta_{n,P} = \sum_{\underline{y}\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\cap\Delta_m} \frac{1}{S_n(P)}\delta_{\underline{y}}.$$

On observe que $\nu_{n,P}$ est l'image directe de $\eta_{n,P}$ par $\varphi_{\underline{u}}$. Par conséquent, $\nu_{n,P}$ est à support dans $\varphi_{\underline{u}}(\Delta_m)$. Donc pour toute fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f est intégrable par rapport à la mesure $\nu_{n,P}$. Par la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu_{n,P} = \int_{\Delta_m} f\circ\varphi_{\underline{u}}\,\mathrm{d}\eta_{n,P},$$

qui est la $n^{\text{ième}}$ somme de Riemann de la fonction $f\circ\varphi_{\underline{u}}:\Delta_m\to\mathbb{R}$. Donc la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\nu_{n,P}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_{\Delta_m} f\circ\varphi_{\underline{u}}\,\mathrm{d}\eta = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\varphi_{\underline{u}*}\eta$, où η est la mesure de Lebesgue sur Δ_m. On en déduit alors que les mesure $\nu_{n,P}$ converge vaguement vers $\varphi_{\underline{u}*}\eta$. □

Corollaire 3.1.6. — *Si Q est une série non-nulle dans $\mathbb{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ à coefficients positifs, et si $P\in\mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ est de la forme*

$$P(X,Y) = Q(X,Y)\prod_{i=1}^{m}(1-XY^{u_i})^{-1},$$

alors les mesures boréliennes $\nu_{n,P}$ convergent vaguement vers $\nu_{\underline{u}}$ lorsque $n\to+\infty$.

Démonstration. — Soit $P' = \prod_{i=1}^{m}(1-XY^{u_i})^{-1}$. On suppose que Q soit de la forme

$$Q(X,Y) = \sum_{|n'|\leq b}\sum_{|d'|\leq r} c_{n',d'}X^{n'}Y^{d'},$$

où $c_{n',d'}\geq 0$. Comme $P=P'Q$,

$$a_{n,d}(P) = \sum_{|n'|\leq b}\sum_{|d'|\leq r} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P')$$

et

$$\begin{aligned}S_n(P) &= \sum_{d\in\mathbb{Z}} a_{n,d}(P) = \sum_{d\in\mathbb{Z}}\sum_{|n'|\leq b}\sum_{|d'|\leq r} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P')\\ &= \sum_{|n'|\leq b}\sum_{|d'|\leq r}\sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P') = \sum_{|n'|\leq b}\sum_{|d'|\leq r} c_{n',d'}S_{n-n'}(P').\end{aligned}$$

On note $C_{n'} = \sum_{|d'|\le r} c_{n',d'}$. Avec cette notation, $S_n(P) = \sum_{|n'|\le b} C_{n'} S_{n-n'}(P')$. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact, alors

$$\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_{n,P} = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{a_{n,d}(P)}{S_n(P)} g(d/n) = \frac{1}{S_n(P)} \sum_{d\in\mathbb{Z}} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') g(d/n).$$

La suite des nombres de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} \sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') g\Big(\frac{d-d'}{n-n'}\Big) \\
&= \frac{1}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} c_{n',d'} S_{n-n'}(P') \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_{n-n',P'} \\
&= \frac{1}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} C_{n'} S_{n-n'}(P') \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_{n-n',P'}
\end{aligned}$$

converge vers $\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_{\underline{u}}$ puisque les mesures $\nu_{n,P'}$ convergent vaguement vers $\nu_{\underline{u}}$ lorsque n tend vers l'infini. La fonction g étant uniformément continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x-y| < \varepsilon$, on ait $|g(x)-g(y)| < \delta$. Soit $d_0 = \max_{1\le i\le m} |u_i|$. Comme $P' = \prod_{i=1}^m (1-XY^{u_i})^{-1}$, si $|d| > d_0 n$, alors $a_{n,d}(P') = 0$. Par conséquent, pour tous les entiers n, d, n' et d' tels que $n > b$, $|n'| \le b$, $|d'| \le r$ et que $a_{n-n',d-d'}(P') \neq 0$, on a

$$\left|\frac{d}{n} - \frac{d-d'}{n-n'}\right| = \left|\frac{d'n - dn'}{n(n-n')}\right| \le \frac{r}{n-n'} + \frac{b((n+b)d_0 + r)}{n(n-n')}.$$

Donc il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tous les entiers n, d, n' et d' vérifiant $n > b$, $|n'| \le b$ et $|d'| \le r$, on ait, ou bien $a_{n-n',d-d'}(P') = 0$, ou bien $\left|\frac{d}{n} - \frac{d-d'}{n-n'}\right| < \varepsilon$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_{n,P} - \frac{1}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} \sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') g\Big(\frac{d-d'}{n-n'}\Big)\right| \\
&\le \frac{1}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} \sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') \left|g\Big(\frac{d}{n}\Big) - g\Big(\frac{d-d'}{n-n'}\Big)\right| \\
&\le \frac{\delta}{S_n(P)} \sum_{|n'|\le b} \sum_{|d'|\le r} \sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') = \delta.
\end{aligned}$$

On en déduit la convergence vague des $\nu_{n,P}$ vers $\nu_{\underline{u}}$. □

Théorème 3.1.7. — *Soit*

$$P(X,Y) = \sum_{r=0}^{h} \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\} \\ \#\alpha = r}} I_\alpha(X,Y) \prod_{i\in\alpha} (1 - XY^{u_i})^{-1} \tag{39}$$

une série dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ *où*

a) P *est à coefficients positifs,*

b) $I_\alpha \in \mathbb{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$,

c) pour tout $\alpha \subset \{1,\cdots,m\}$ *de cardinal* h, I_α *est à coefficients positifs,*

d) il existe au moins un $\alpha \subset \{1,\cdots,m\}$ *de cardinal* h *tel que* $I_\alpha \neq 0$.

Alors les mesures boréliennes $\nu_{n,P}$ *convergent vaguement vers une mesure borélienne* ν_P *lorsque* $n \to +\infty$. *De plus, si pour tout* $\alpha = \{i_1 < \cdots < i_h\}$ *on note* $\underline{u}_\alpha = (u_{i_1},\cdots,u_{i_h})$, *alors la mesure limite* ν_P *est égale à*

$$\sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} \frac{I_\alpha(1,1)}{S}\nu_{\underline{u}_\alpha} \qquad \text{où} \qquad S = \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} I_\alpha(1,1). \tag{40}$$

Donc ν_P *est une mesure de probabilité lorsque* $h>0$. *Si* $h=0$, *alors* ν_P *est la mesure nulle.*

Démonstration. — Pour toute série $Q \in \mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$, on utilise les expression $a_{n,d}(Q)$ et $S_n(Q)$ pour désigner respectivement le coefficient de X^nY^d de Q et le coefficient de X^n de $Q(X,1)$. Pour tout $\alpha \subset \{1,\cdots,m\}$ tel que $\#\alpha = h$, on note $P_\alpha^{(1)}(X,Y) = I_\alpha(X,Y)\prod_{i\in\alpha}(1-XY^{u_i})^{-1}$. Soient

$$P^{(1)} = \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} P_\alpha^{(1)} \quad \text{et} \quad P^{(2)} = P - P^{(1)}.$$

D'après le corollaire 3.1.6, les mesures $\nu_{n,P_\alpha^{(1)}}$ convergent vaguement vers ν_{d_α} lorsque $I_\alpha \neq 0$, et convergent vaguement vers la mesure nulle lorsque $I_\alpha = 0$. Comme

$$\nu_{n,P^{(1)}} = \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} \frac{S_n(P_\alpha^{(1)})}{S_n(P^{(1)})}\nu_{n,P_\alpha^{(1)}}$$

et comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(P_\alpha^{(1)})}{S_n(P^{(1)})} = \frac{I_\alpha(1,1)}{S}$, on obtient que les mesures $\nu_{n,P^{(1)}}$ convergent vaguement vers $\displaystyle\sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} \frac{I_\alpha(1,1)}{S}\nu_{u_\alpha}$. Enfin, comme les I_α ($\#\alpha = h$) sont à coefficients positifs et comme l'un parmi eux est non-nul, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(P^{(2)})/S_n(P^{(1)}) = 0$. On en déduit donc que les mesures

$$\nu_{n,P} = \frac{1}{S_n(P)}\Big(S_n(P^{(1)})\nu_{n,P^{(1)}} + \sum_{d\in\mathbb{Z}} a_{n,d}(P^{(2)})\delta_{d/n}\Big)$$

convergent vaguement vers la limite des $\nu_{n,P^{(1)}}$.

□

3.1.3. Convergence des polygones. — On s'intérèsse maintenant à la convergence des polygones associés à un module bigradué. Soient $m \geq 1$ un entier et $\underline{u} = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{N}^m$. Soit $f = (f_1, f_2) : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ une application telle que $f_1 \equiv 1$ et que $f_2(i) = u_i$. Soient $A = k[f]$ et M un A-module bigradué de type fini.

Soit $P = P_M$ la série de Poincaré à deux variables de M. Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'espace vectoriel $M_{n,\bullet} := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_{n,d}$ de la $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ définie par $\mathcal{F}^{(n)}_\lambda M_{n,\bullet} = \bigoplus_{d \geq \lambda} M_{n,d}$, alors la mesure $\nu_{n,P}$ définie dans (38) s'identifie à $T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$, où $\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ est la mesure associée à la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ définie dans §1.2.2, et $T_{\frac{1}{n}}$ est l'opération de dilatation définie dans §1.2.4. On suppose que $M_{n,\bullet}$ est non-nul lorsque n est assez grand et donc $\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ est une mesure de probabilité. Le théorème 3.1.7 combiné avec la proposition 1.2.9, implique le résultat suivant :

Théorème 3.1.8. — *La suite des polygones de la forme* $\frac{1}{n}\mathcal{P}(\nu_{\mathcal{F}^{(n)}})$ *converge uniformément vers une fonction concave sur* $[0,1]$ *lorsque* n *tend vers l'infini. Si de plus la série* P *s'écrit sous la forme* (39), *alors la limite des polygones coïncide à* $\mathcal{P}(\nu_P)$ *où* ν_P *est la mesure de probabilité définie dans* (40).

Démonstration. — D'après le théorème 3.1.7, la suite de mesures $(T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}})_{n \geq 1}$ converge vaguement vers ν_P. D'après (6), on a $\mathcal{P}(T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}) = \frac{1}{n}\mathcal{P}(\nu_{\mathcal{F}^{(n)}})$. La proposition 1.2.9 montre alors que $(\frac{1}{n}\mathcal{P}(\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $\mathcal{P}(\nu_P)$. □

Exemple 3.1.9. — On considère un cas particulier où $M = A$. Dans ce cas-là, la limite ν_P des mesure est $\nu_{\underline{u}}$ — l'image directe de la mesure de Lebesgue sur Δ_m par l'application linéaire $\varphi_{\underline{u}}$. Par conséquent, la fonction $F_{\nu_{\underline{u}}}(x) = \nu_{\underline{u}}(]x, +\infty[)$ est continue et est linéaire par morceaux lorsque les u_i ne sont pas identiques. Donc il en est de même de la fonction $F^*_{\nu_{\underline{u}}}$ (voir §1.2.5 pour la définition). On en déduit que la limite des polygone $\mathcal{P}(\nu_{\underline{u}})$ est quadratique par morceaux. Si de plus $n = 2$, alors $\Delta_2 = \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\}$ est paramétré par $[0,1]$, et l'application $\varphi_{\underline{u}} : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ envoie $(x, 1-x)$ en $u_1 x + u_2(1-x)$. Donc $\nu_{\underline{u}}$ est la mesure équiprobable sur l'intervalle délimité par u_1 et u_2. La fonction $F_{\nu_{\underline{u}}}(x)$ est égale à $\left|\dfrac{(u_2 - x)_+ - (u_1 - x)_+}{u_2 - u_1}\right|$ si $u_1 \neq u_2$ et à $1\!\!1_{]u_1, +\infty[}(x)$ si $u_1 = u_2$. On en déduit $F^*_{\nu_{\underline{u}}}(t) = |u_1 - u_2|t + \max(u_1, u_2)$ et donc $\mathcal{P}(\nu_{\underline{u}})(t) = \frac{1}{2}|u_1 - u_2|t^2 + \max(u_1, u_2)t$.

Remarque 3.1.10. — Dans certains cas particuliers on peut généraliser le théorème 3.1.8. Soit $B = k[X_1, \cdots, X_m]$ l'algèbre des polynômes, munie de la graduation usuelle. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, on utilise le symbole X^α pour désigner le monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_m^{\alpha_m}$ et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. On suppose que, pour tout entier $n \geq 1$, l'espace B_n des polynômes homogènes de degré n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ telle que la base formée des monômes soit compatible à la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ et que $\lambda_{\mathcal{F}^{(|\alpha|+|\beta|)}}(X^{\alpha+\beta}) = \lambda_{\mathcal{F}^{(|\alpha|)}}(X^\alpha) + \lambda_{\mathcal{F}^{(|\beta|)}}(X^\beta)$. Autrement dit, l'algèbre B est "$\mathbb{N} \times \mathbb{R}$-bigraduée". Pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$ soit $b_i = \lambda_{\mathcal{F}^{(1)}}(X_i)$. Soit $\underline{b} = (b_1, \cdots, b_m)$. Par définition

$$\nu_{\mathcal{F}^{(n)}} = \frac{1}{\operatorname{rg} B_n} \sum_{|\alpha|=n} \delta_{\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m}, \qquad T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}} = \frac{1}{\operatorname{rg} B_n} \sum_{\underline{y} \in \frac{1}{n}\mathbb{N}^m \cap \Delta_m} \varphi_{\underline{b}*}(\delta_{\underline{y}}).$$

On en déduit donc que la suite de mesures $(T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}})_{n \geq 1}$ converge vaguement vers $\nu_{\underline{b}}$.

3.2. Algèbres graduées quasi-filtrées et pseudo-filtrées

Dans la section précédente, en utilisant la méthode des séries de Poincaré on a pu établir un théorème de convergence (le théorème 3.1.8) pour les algèbres bigraduées. En fait, le même résultat est aussi vrai pour une algèbre graduée munie des filtrations dont l'algèbre bigraduée associée est de type fini.

Soit $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ une algèbre graduée de type fini sur k. On suppose que chaque espace vectoriel B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante $\mathcal{F}^{(n)}$ telle que le support de $\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ est contenu dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que les points de saut sont des entiers positifs) et que l'algèbre B soit filtrée pour les filtrations $\mathcal{F}^{(n)}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_s^{(n)} B_n \mathcal{F}_t^{(n')} B_{n'} \subset \mathcal{F}_{s+t}^{(n+n')} B_{n+n'}$ quels que soient $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ et $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier d, soit $\widetilde{B}_{n,d}$ le sous-quotient $\mathcal{F}_d^{(n)} B_n / \mathcal{F}_{d+1}^{(n)} B_n$. Alors la somme directe $\widetilde{B} = \bigoplus_{n,d} \widetilde{B}_{n,d}$ forme une algèbre bigraduée sur k, où le produit de deux éléments $[x] \in B_{n,d}$ et $[y] \in B_{n',d'}$ est la classe de xy dans $\mathcal{F}_{d+d'}^{(n+n')} B_{n+n'} / \mathcal{F}_{d+d'+1}^{(n+n')} B_{n+n'}$. Soit $P \in \mathbb{Z}[\![X, Y]\!]$ la série telle que

$$P(X, Y) = \sum_{(n,d) \in \mathbb{N}^2} \operatorname{rg}_k(\widetilde{B}_{n,d}) X^n Y^d.$$

Il s'avère que la mesure dilatée $T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ associée à la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ coïncide avec $\nu_{n,P}$. Dans le cas où $\widetilde{B}$ est une algèbre de type fini sur k, cette observation nous permet d'appliquer le théorème 3.1.8 pour démontrer la convergence des $T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ et pour calculer la limite.

Cependant, il est très rare que la nouvelle algèbre $\widetilde{B}$ soit de type fini. On peut considérer un exemple simple où $B = k[X]$ est l'algèbre des polynômes à une variable. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers dans $\mathbb{N}$ telle que

$$(41) \qquad a_0 = 0, \quad 0 \leq a_n \leq n, \quad a_{n+n'} < a_n + a_{n'} \ \text{ quel que soit } (n, n') \in \mathbb{Z}_{>0}^2.$$

On suppose que B est usuellement graduée et que la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ de l'espace kX^n admet un seul point de saut en $n - a_n$. L'algèbre B est filtrée car

$$\lambda_{\mathcal{F}^{(n+n')}}(X^{n+n'}) = (n+n') - a_{n+n'} \geq (n - a_n) + (n' - a_{n'}) = \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(X^n) + \lambda_{\mathcal{F}^{(n')}}(X^{n'}),$$

où les fonctions λ sont définies dans (2). L'algèbre bigraduée $\widetilde{B}$ s'identifie à $k[T_1, \cdots, T_n, \cdots]$, où le bidegré de T_n est (n, a_n), modulo l'idéal homogène engendré par les éléments de la forme $T_n T_{n'}$. Ce n'est pas une algèbre de type fini. Par ailleurs, la mesure associée à $\mathcal{F}^{(n)}$ est la mesure de Dirac δ_{a_n}. La condition (41) combinée avec le corollaire 1.3.3 montre que la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. Cela montre effectivement que les mesures $T_{\frac{1}{n}}\delta_{a_n} = \delta_{a_n/n}$ convergent vaguement vers une mesure de Dirac lorsque n tend vers l'infini.

Cet exemple suggère que la convergence vague des mesures associées à une algèbre graduée munie des filtrations devrait vérifier sous une hypothèse assez faible sur la croissance des filtrations. La formalisation de cette observation conduit à deux notions similaires — *algèbre graduée quasi-filtrée* et *algèbre graduée pseudo-filtrée* — qui sont importantes dans la deuxième stratégie à étudier la convergence des polygones que l'on présentera dans les sections qui suivent.

On fixe dans cette section une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et une algèbre graduée $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ qui est de type fini sur k, où chaque espace vectoriel B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante $\mathcal{F}^{(n)}$.

3.2.1. Algèbre graduée quasi-filtrée. —

Définition 3.2.1. — On dit que l'algèbre graduée B est *f-quasi-filtrée* s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $r > 0$, tout $(n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{Z}^r_{\geq n_0}$ et tout $(s_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{R}^r$, on ait

$$\prod_{i=1}^r \mathcal{F}^{(n_i)}_{s_i} B_{n_i} \subset \mathcal{F}^{(N)}_S B_N, \qquad \text{où} \quad N = \sum_{i=1}^r n_i \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=1}^r (s_i - f(n_i)).$$

Une algèbre graduée 0-quasi-filtrée s'appelle aussi une *algèbre graduée filtrée*, où le symbole 0 désigne la fonction constante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}_{\geq 0}$ qui prend valeur 0.

L'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée si et seulement s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tous les éléments homogènes $x_1, \cdots, x_r$ de degré $n_1, \cdots, n_r$ dans $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ respectivement, en posant $x = x_1 x_2 \cdots x_r$ et $N = n_1 + \cdots + n_r$, on ait

$$\lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(x) \geq \sum_{i=1}^r \big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(x_i) - f(n_i)\big).$$

Exemple 3.2.2. — On considère un exemple où l'algèbre B est l'algèbre $k[X]$ des polynôme à une variable, munie de la graduation usuelle. Pour tout entier $n \geq 1$ soit $a_n = \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(X^n)$. Alors cette algèbre graduée est f-quasi-filtrée si et seulement s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour toute suite finie $n_1, \cdots, n_r$ d'entiers $\geq n_0$, on ait

$$a_{n_1+\cdots+n_r} \geq \sum_{i=1}^r \big(a_{n_i} - f(n_i)\big).$$

D'après le corollaire 1.3.2, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge pourvu que $a_n = O(n)$ $(n \to \infty)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$.

Remarque 3.2.3. — On suppose que l'algèbre graduée B est f-quasi-filtée. Alors pour toute fonction g qui domine f, c'est-à-dire telle que $g(n) \geq f(n)$ quel que soit

$n \in \mathbb{N}$, l'algèbre B est g-quasi-filtrée. En outre, pour toute sous-algèbre A engendrée par des éléments homogènes, A est aussi f-quasi-filtrée.

On présente au-dessous un résultat de convergence. Bien que sa démonstration est élémentaire, elle contient déjà des idées importantes de la preuve de la convergence des polygone.

Proposition 3.2.4. — *On suppose que*

1) l'algèbre graduée B est intègre et f-quasi-filtrée, et $B_n \neq 0$ pour n assez grand,

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$,

3) il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Alors la suite $(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$, où l'application $\lambda_{\max}$ est définie dans (3).

Démonstration. — Soit $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ comme dans la définition 3.2.1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit x_n un élément non-nul dans B_n tel que $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(x_n) = \lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})$. On suppose que $r \geq 1$ et un entier et que $n_1, \cdots, n_r$ sont des éléments dans $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. On note $N = n_1 + \cdots + n_r$. L'algèbre B étant intègre, le produit $x_{n_1} \cdots x_{n_r}$ est non-nul. Comme B est f-quasi-filtrée, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(N)}) \geq \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(x_{n_1}\cdots x_{n_r}) &\geq \sum_{i=1}^{r}\big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(x_{n_i}) - f(n_i)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\big(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n_i)}) - f(n_i)\big).\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}))_{n\geq 1}$ vérifie les conditions du corollaire 1.3.2. Donc elle converge dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 3.2.5. — On verra dans la remarque 3.4.4 que l'énoncé de la proposition 3.2.4 n'est pas nécessairement vrai si l'algèbre B n'est pas intègre.

Proposition 3.2.6. — *On suppose que*

1) l'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée, $B_n \neq 0$ pour n assez grand, et $B_nB_m = B_{n+m}$ pour n et m assez grands,

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$,

3) il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Alors la suite $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$, où l'application $\lambda_{\min}$ est définie dans (3).

Démonstration. — Soit $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ comme dans la définition 3.2.1. Quitte à agrandir n_0, on peut supposer que $B_nB_m = B_{n+m}$ dès que n et m sont tous supérieurs ou égaux à n_0. Soient $n_1, \cdots, n_r$ des entiers arbitraires dans $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ et $N = n_1 + \cdots + n_r$. Soit $W = \{b_1 \cdots b_r \mid \forall i,\ b_i \in B_{n_i}\}$. Comme $B_N = B_{n_1} \cdots B_{n_r}$, l'espace B_N est engendré comme groupe additif par W. Si $a_1, \cdots, a_m$ sont des éléments dans W, on a $\lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(a_1 + \cdots + a_m) \geq \min\limits_{1\leq i\leq m}(\lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(a_i))$. On en déduit l'existence d'un élément $y \in W$ tel que $\lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(y) = \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(N)})$. On suppose que $y = c_1 \cdots c_r$ avec $c_i \in B_{n_i}$. Alors

$$\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(N)}) = \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(y) \geq \sum_{i=1}^{r}\big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(c_i) - f(n_i)\big) \geq \sum_{i=1}^{r}\big(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n_i)}) - f(n_i)\big).$$

D'après le corollaire 1.3.2, la suite $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 3.2.7. — L'assertion de la proposition 3.2.6 n'est pas nécessairement vraie si la condition "$B_{n+m} = B_n B_m$ pour n, m assez grands" n'est pas satisfaite. On considère l'algèbre de polynômes $B = k[X, Y]$ qui est graduée de sorte que X soit homogène de degré 1 et Y soit homogène de degré 2. Dans ce cas-là B_n est engendré comme un espace vectoriel sur k par $\mathbf{e}_n := (X^n, X^{n-2}Y, \cdots, Y^{n/2})$ si n est pair et par $\mathbf{e}_n := (X^n, X^{n-2}Y, \cdots, XY^{(n-1)/2})$ si n est impaire. Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'espace B_n une filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ telle que

1) la base $\mathbf{e}_n$ soit compatible à $\mathcal{F}^{(n)}$;
2) si n est impair, pour tout $a \in \mathbf{e}_n$, $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(a) = 0$;
3) si n est pair, pour tout $a \in \mathbf{e}_n$ autre que $Y^{n/2}$, $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(a) = 0$, et $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(Y^{n/2}) = -n$.

On vérifie que l'algèbre B est filtrée. D'abord, pour tout élément $Q \in B_n$, $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(Q) = 0$ si Q est divisible par X et $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(Q) = -n$ sinon. On suppose que $P \in B_n$ et $Q \in B_m$ sont deux éléments non-nuls. Si l'un des P et Q est divisible par X, alors il en est de même de PQ. Par conséquent, $\lambda_{\mathcal{F}^{(n+m)}}(PQ) = 0 \geq \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(P) + \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(Q)$; sinon $\lambda_{\mathcal{F}^{(n+m)}}(PQ) = -(n+m) = \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(P) + \lambda_{\mathcal{F}^{(m)}}(Q)$. Donc la relation $\lambda_{\mathcal{F}^{(n+m)}}(PQ) \geq \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(P) + \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(Q)$ est toujours vérifiée. On en déduit par récurrence que l'algèbre graduée B est filtrée. Cependant, $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})$ est égal à 0 si n est impair et est égal à $-n$ si n est pair. Donc la convergence de $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ n'est pas vérifiée.

Bien que les hypothèses algébriques dans les propositions 3.2.4 et 3.2.6 sont légèrement différentes, les preuves utilise une même technique — les suites presques sur-additives — discutée dans §1.3, qui jouera un rôle important dans l'étude de la convergence des polygones.

3.2.2. Algèbre graduée pseudo-filtrée. — On présente une variante de la notion d'algèbre graduée quasi-filtrée — celle d'algèbre graduée pseudo-filtrée. Cette notion demande des conditions algébriques plus faibles. Ceci permet de simplifier dans certains cas la vérification des conditions.

Définition 3.2.8. — On dit que l'algèbre graduée B est *f-pseudo-filtrée* s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{Z}^2_{\geq n_0}$, tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on ait $(\mathcal{F}_s^{(m)} B_m)(\mathcal{F}_t^{(n)} B_n) \subset \mathcal{F}_{s+t}^{(m+n)} B_{m+n}$.

Une algèbre graduée 0-pseudo-filtrée est exactement une *algèbre graduée filtrée*. En outre, l'algèbre graduée B est pseudo-filtrée si et seulement s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tous les éléments homogènes x et y de B de degrés m et n dans $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ respectivement, on ait $\lambda_{\mathcal{F}^{(m+n)}}(xy) \geq \lambda_{\mathcal{F}^{(m)}}(x) + \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(y) - f(m) - f(n)$.

On présente dans le contexe des algèbres graduées pseudo-filtrées les résultats de convergence des suites $(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ et $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)$ en s'imposant d'une condition de croissante lente de f qui est plus forte que l'annulation de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n$. Au lieu d'utiliser le corollaire 1.3.2, on fait appel au corollaire 1.3.6. Comme les démonstrations sont très similiares que celles des propositions 3.2.4 et 3.2.6, on laisse les lecteurs le soin de les compléter.

Proposition 3.2.9. — *On suppose que*

1) l'algèbre graduée B est intègre et f-pseudo-filtrée, et $B_n \neq 0$ pour n assez grand,

2) la fonction f est croissante et $\sum\limits_{\alpha\geq 0} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$,

3) il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Alors la suite $(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.10. — *On suppose que*

1) l'algèbre graduée B est f-pseudo-filtrée, $B_n \neq 0$ pour n assez grand, et $B_nB_m = B_{n+m}$ pour n et m assez grands,

2) la fonction f est croissante et $\sum\limits_{\alpha\geq 0} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$,

3) il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Alors la suite $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.

3.3. Convergence des mesures : cas d'algèbre de polynômes

On démontrera dans cette section la convergence vague des mesures associés à une algèbre de polynôme usuellement graduée qui est quasi-filtrée. Comme expliqué au début du chapitre, l'idée est de passer par la presque sur-additivité de ces mesures. Cette presque sur-additivité sera établie par un argument combinatoire fin des points entiers dans des simplexes.

3.3.1. Combinatoire des points entiers dans des simplexes. — Pour tout couple d'entiers (n, d) tel que $n \geq 0$ et que $d \geq 1$, soit $\Omega_n^{(d)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ formé des décompositions de n en somme de d entiers positifs ou nuls. On introduit la relation d'ordre lexicographique sur $\Omega_n^{(d)}$: $(a_1, \cdots, a_d) \geq (b_1, \cdots, b_d)$ si et seulement s'il existe $i \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $a_j = b_j$ pour tout $j \in \{1, \cdots, i\}$ et que $a_{i+1} > b_{i+1}$ si $i < d$. L'ensemble $\Omega_n^{(d)}$ est totalement ordonné par cette relation d'ordre. D'autre part, pour tout $\mathbf{n} = (n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{N}^r$, on a une application de $\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}$ vers

$\Omega^{(d)}_{n_1+\cdots+n_r}$. qui envoie $(\alpha_i)_{1\le i\le r}$ vers $\alpha_1+\cdots+\alpha_r$ (l'addition étant celle de $\mathbb{Z}^d$). Cette application n'est pas injective en général mais est toujours surjective. En outre, si $(\alpha_i)_{1\le i\le r}$ et $(\beta_i)_{1\le i\le r}$ sont deux éléments de $\Omega^{(d)}_{n_1}\times\cdots\Omega^{(d)}_{n_r}$ tels que $\alpha_i\ge\beta_i$ pour tout i, alors $\alpha_1+\cdots+\alpha_r\ge\beta_1+\cdots+\beta_r$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on désigne par $\Gamma^{(d)}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}^{d-1}$ formé des éléments $(a_i)_{1\le i\le d-1}$ tels que $0\le a_1+\cdots+a_{d-1}\le n$. On a une bijection naturelle $p^{(d)}_n$: $\Omega^{(d)}_n\to\Gamma^{(d)}_n$ définie par la projection sur les $d-1$ premiers facteurs. Son inverse est l'application qui envoie $(a_i)_{1\le i\le d-1}$ en $(a_1,\cdots,a_{d-1},n-a_1-\cdots-a_{d-1})$. Pour tout $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}\in\mathbb{N}^r$, le diagramme suivant est commutatif :

(42)
$$\begin{tikzcd}
\Omega^{(d)}_{n_1}\times\cdots\times\Omega^{(d)}_{n_r} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "p^{(d)}_{n_1}\times\cdots\times p^{(d)}_{n_r}"'] & \Omega^{(d)}_{|\mathbf{n}|} \arrow[d, "p^{(d)}_N"] \\
\Gamma^{(d)}_{n_1}\times\cdots\times\Gamma^{(d)}_{n_r} \arrow[r, "+"'] & \Gamma^{(d)}_{|\mathbf{n}|}
\end{tikzcd}$$

où $|\mathbf{n}|=n_1+\cdots+n_r$ et où les applications "+" sont définies par l'addition dans les monoïdes $\mathbb{N}^d$ et $\mathbb{N}^{d-1}$, respectivement.

Théorème 3.3.1. — *Soient $r\ge 2$ et $d\ge 1$ deux entiers. Pour tout $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}\in\mathbb{N}^r$, il existe une mesure de probabilité $\rho_{\mathbf{n}}$ sur $\Omega^{(d)}_{n_1}\times\cdots\times\Omega^{(d)}_{n_r}$ telle que l'image directe de $\rho_{\mathbf{n}}$ par chacune des r projections sur $\Omega^{(d)}_{n_1},\cdots,\Omega^{(d)}_{n_r}$ soit une mesure équiprobable, ainsi que son image directe par l'application "+" à valeurs dans $\Omega^{(d)}_{|\mathbf{n}|}$.*

Démonstration. — Le théorème est trivial lorsque $d=1$ car alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\Omega^{(d)}_k$ est le singleton $\{k\}$. Dans la suite de la démonstration, on suppose $d\ge 2$. D'après (42) il suffit de construire une mesure de probabilité $\rho_{\mathbf{n}}$ sur $\Gamma^{(d)}_{n_1}\times\cdots\times\Gamma^{(d)}_{n_r}$ telle que l'image directe de $\rho_{\mathbf{n}}$ par chacune des r projections sur $\Gamma^{(d)}_{n_1},\cdots,\Gamma^{d}_{n_r}$ soit une mesure équiprobable, ainsi que son image directe par l'application "+" à valeurs dans $\Gamma^{(d)}_{|\mathbf{n}|}$.

Pour tout $\alpha=(a_i)_{1\le i\le d-1}\in\mathbb{N}^{d-1}$, on définit $|\alpha|=a_1+\cdots+a_{d-1}$. L'ensemble $\Gamma^{(d)}_n$ s'écrit sous la forme $\Gamma^{(d)}_n=\big\{\alpha\in\mathbb{N}^{d-1}\ \big|\ |\alpha|\le n\big\}$. Si $\alpha=(a_i)_{1\le i\le d-1}$ est un élément de $\mathbb{N}^{d-1}$, on note $\alpha!=a_1!\times\cdots\times a_{d-1}!$.

On considère l'anneau des séries formelles de rd variables $R=\mathbb{Z}[\![\mathbf{t},\mathbf{X}]\!]$, où $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_r)$, $\mathbf{X}=(X_{i,j})_{\substack{1\le i\le r,\\ 1\le j\le d-1}}$. Si $\alpha=(a_1,\cdots,a_{d-1})\in\mathbb{N}^{d-1}$ et si $i\in\{1,\cdots,r\}$, on désigne par X_i^α le produit $X_{i,1}^{a_1}\times\cdots\times X_{i,d-1}^{a_{d-1}}$. Si $\mathbf{n}=(n_1,\cdots,n_r)$ est un élément de $\mathbb{N}^r$, on désigne par $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ le produit $t_1^{n_1}\times\cdots\times t_r^{n_r}$. Soit $H(\mathbf{t},\mathbf{X})$ la série formelle à coefficients entiers positifs

$$\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{N}^{d-1})^r\\ |\alpha_i|\le n_i}}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\,\frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!}\prod_{j=1}^r X_j^{\alpha_j}.$$

En faisant les changements d'indexation $m_i = n_i - |\alpha_i|$ et en permutant les sommations, puis en posant $(\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ et $m = m_1 + \cdots + m_r$, on obtient l'égalité suivante dans $\mathbb{Z}[\![\mathbf{t}, \mathbf{X}]\!]$:

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{t}, \mathbf{X}) &= \sum_{(\alpha_i)\in(\mathbb{N}^{d-1})^r} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \prod_{j=1}^{r} t_j^{|\alpha_j|} X_j^{\alpha_j} \sum_{\mathbf{m}=(m_i)\in\mathbb{N}^r} \frac{(m_1 + \cdots + m_r)!}{m_1! \cdots m_r!} \mathbf{t}^{\mathbf{m}} \\
&= \sum_{(\beta_i)\in\mathbb{N}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} (t_1 X_{1,i} + \cdots + t_r X_{r,i})^{\beta_i} \sum_{m\in\mathbb{N}} (t_1 + \cdots + t_r)^m \\
&= (1 - (t_1 + \cdots + t_r))^{-1} \prod_{i=1}^{d-1} (1 - (t_1 X_{1,i} + \cdots + t_r X_{r,i}))^{-1}.
\end{aligned}$$

Ce calcul montre aussi (cf. [**28**] II §2.4) que le domaine de convergence absolue de Reinhardt de $H(\mathbf{t}, \mathbf{X})$ dans $\mathbb{C}^{rd}$ est défini par les conditions

$$\sum_{j=1}^{r} |t_j| < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r} |t_j||X_{j,i}| < 1.$$

Cette observation nous autorise à substituer le vecteur $\mathbb{1} = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{d-1 \text{ copies}})$ à certaines des variables X_i sans avoir à examiner de questions de convergence (qui sont en fait anodines).

On effectue le changement de variables $m_i = n_i - |\alpha_i|$ pour $2 \leq i \leq r$, et on obtient

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{t}, \mathbf{X})|_{X_2=\cdots=X_r=\mathbb{1}} \\
&= \sum_{n_1\geq 0} t_1^{n_1} \sum_{|\alpha_1|\leq n_1} X_1^{\alpha_1} \sum_{\substack{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{N}^{d-1})^{r-1} \\ (m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{N}^{r-1}}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \\
&\qquad \frac{(n_1 + m_2 + \cdots + m_r - |\alpha_1|)!}{(n_1 - |\alpha_1|)! m_2! \cdots m_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{m_j + |\alpha_j|} \\
&= \sum_{n_1\geq 0} t_1^{n_1} \sum_{|\alpha_1|\leq n_1} X_1^{\alpha_1} \sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{N}^{d-1})^{r-1}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{|\alpha_j|} \\
&\qquad \sum_{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{N}^{r-1}} \frac{(n_1 + m_2 + \cdots + m_r - |\alpha_1|)!}{(n_1 - |\alpha_1|)! m_2! \cdots m_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{m_j}.
\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante est vérifiée dans $\mathbb{Z}[\![t]\!]$

$$\sum_{b\geq 0} \frac{(a+b)!}{a!b!} t^b = (1-t)^{-a-1}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{N}^{d-1})^{r-1}} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&= \sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{N}^{d-1})^{r-1}} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!(\alpha_2+\cdots+\alpha_r!)}\frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_2!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d-1}} \frac{(\alpha_1+\alpha)!}{\alpha_1!\alpha!} \sum_{\substack{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{N}^{d-1})^{r-1}\\ \alpha_2+\cdots+\alpha_r=\alpha}} \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d-1}} \frac{(\alpha_1+\alpha)!}{\alpha_1!\alpha!}(t_2+\cdots+t_r)^{|\alpha|} = (1-(t_2+\cdots+t_r))^{-|\alpha_1|-d+1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{N}^{r-1}} \frac{(n_1+m_2+\cdots+m_r-|\alpha_1|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&= \sum_{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{N}^{r-1}} \frac{(n_1+m_2+\cdots+m_r-|\alpha_1|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!(m_2+\cdots+m_r)!}\frac{(m_2+\cdots+m_r)!}{m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&= \sum_{M\geq 0} \frac{(n_1-|\alpha_1|+M)!}{(n_1-|\alpha_1|)!M!} \sum_{\substack{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{N}^{r-1}\\ m_2+\cdots+m_r=M}} \frac{(m_2+\cdots+m_r)!}{m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&= \sum_{M\geq 0} \frac{(n_1-|\alpha_1|+M)!}{(n_1-|\alpha_1|)!M!}(t_2+\cdots+t_r)^M = (1-(t_2+\cdots+t_r))^{-n_1+|\alpha_1|-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_2=\cdots=X_r=\mathbb{1}} &= \sum_{n_1\geq 0} t_1^{n_1}(1-(t_2+\cdots+t_r))^{-n_1-d}\sum_{|\alpha_1|\leq n_1} X_1^{\alpha_1}\\
&= \sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}\frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{(n_1+d-1)!n_2!\cdots n_r!}\sum_{|\alpha_1|\leq n_1} X_1^{\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{43}$$

De même, pour tout $j\in\{1,\cdots,r\}$, on a

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_{j-1}=X_{j+1}=\cdots=X_r=\mathbb{1}}\\
&= \sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}\frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{n_1!\cdots n_{j-1}!(n_j+d-1)!n_{j+1}!\cdots n_r!}\sum_{|\alpha_j|\leq n_j} X_j^{\alpha_j}.
\end{aligned} \tag{44}$$

D'autre part,

$$H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y}=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{N}^{d-1})^r\\|\alpha_i|\le n_i}}Y^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!}.$$

En faisant les changements d'indexation $m_i=n_i-|\alpha_i|$ pour tout $1\le i\le r$, on obtient

$$\begin{aligned}&H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y}\\&=\sum_{(\alpha_i)\in(\mathbb{N}^{d-1})^r}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=1}^r t_j^{|\alpha_j|}Y^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\sum_{\mathbf{m}=(m_i)\in\mathbb{N}^r}\frac{(m_1+\cdots+m_r)!}{m_1!\cdots m_r!}\mathbf{t}^{\mathbf{m}}\\&=\sum_{N\ge0}(t_1+\cdots+t_r)^N\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{d-1}}Y^\gamma(t_1+\cdots+t_r)^{|\gamma|}=\sum_{M\ge0}(t_1+\cdots+t_r)^M\sum_{|\gamma|\le M}Y^\gamma,\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'indexation $M=N+|\gamma|$ dans la dernière égalité. Par conséquent,

$$H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y}=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r}\frac{(n_1+\cdots+n_r)!}{n_1!\cdots n_r!}t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}\sum_{|\gamma|\le n_1+\cdots+n_r}Y^\gamma. \tag{45}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}&H(\mathbf{t},(\mathbb{1},\cdots\mathbb{1}))=(1-(t_1+\cdots+t_r))^{-d}\\&=\sum_{N\ge0}\frac{(N+d-1)!}{N!(d-1)!}\sum_{\substack{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r\\n_1+\cdots+n_r=N}}\frac{N!}{n_1!\cdots n_r!}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\\&=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r}\frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{n_1!\cdots n_r!(d-1)!}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}.\end{aligned}\tag{46}$$

Pour tout $\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{N}^r$, posons

$$\rho_{\mathbf{n}}=\frac{(d-1)!n_1!\cdots n_r!}{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}\sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{N}^{d-1})^r\\|\alpha_i|\le n_i}}\left(\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!}\right)\delta_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)}.$$

La définition de $H(\mathbf{t},\mathbf{X})$ et les égalités (44), (45) et (46) montrent que $\rho_{\mathbf{n}}$ vérifie les conditions requises. □

Remarque 3.3.2. — Le théorème 3.3.1 équivaut à résoudre un système d'équations linéaires homogènes, où le nombre des indéterminés est en général beaucoup plus grand que celui des équations. La difficulté provient du besoin d'une solution positive et non-triviale. Un cas très particulier où $d=2$ du théorème montre que, pour tous les entiers $m,n\ge1$, dans un réseau rectangulaire de taille $m\times n$, on peut toujours placer des entiers strictement positifs tels que, les sommes des entiers dans chaque ligne, dans chaque colone et dans chaque diagonale principale sont respectivements égales.

3.3.2. Convergence vague des mesures. — Dans ce sous paragraphe, on utilise le théorème combinatoire établi au-dessus pour démontrer la convergence vague des mesures. On fixe une algèbre de polynômes $B = k[X_1, \cdots, X_d]$ $(d \geq 1)$ qui est usuellement graduée, c'est-à-dire que B_n est l'espaces des polynômes homogènes de degré n en $X_1, \cdots, X_d$. Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ est un élément dans $\mathbb{N}^d$, on utilise l'expression X^α pour désigner le monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'espace B_n d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}^{(n)}$. Enfin, soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application. On suppose que l'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée. Soit n_0 comme dans la définition 3.2.1.

Soit $\varphi_n : \Omega_n^{(d)} \to B_n$ l'application qui envoie $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ en X^α, où $\Omega_n^{(d)}$ est l'ensemble des décompositions de n défini dans le sous-paragraphe précédent. L'image de $\Omega_n^{(d)}$ par φ_n est une base de B_n. D'après la proposition 1.2.4), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une base $\mathbf{u}^{(n)} = (u_\alpha)_{\alpha \in \Omega_n^{(d)}}$ de B_n telle que,

$$\forall \alpha \in \Omega_n^{(d)}, \quad u_\alpha \in X^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} kX^\beta, \tag{47}$$

et qui est compatible à la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$. Si $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}^r$ et si $N = n_1 + \cdots + n_r$, pour tout $\gamma \in \Omega_N^{(d)}$, soit $u_\gamma^{(\mathbf{n})}$ un élément dans

$$\left\{ \prod_{i=1}^r u_{\alpha_i} \;\middle|\; \alpha_i \in \Omega_{n_i}^{(d)},\ \sum_{i=1}^r \alpha_i = \gamma \right\}.$$

tel que

$$\lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(u_\gamma^{(\mathbf{n})}) = \max_{\substack{\alpha_i \in \Omega_{n_i}^{(d)} \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = \gamma}} \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_r}).$$

De (47), on déduit

$$u_\gamma^{(\mathbf{n})} \in X^\gamma + \sum_{\delta < \gamma} kX^\delta.$$

Donc $\mathbf{u}^{(\mathbf{n})} := (u_\gamma^{(\mathbf{n})})_{\gamma \in \Omega_N^{(d)}}$ est une base de B_N.

Proposition 3.3.3. — *Soient c un nombre réel positif et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante concave et c-lipschitzienne. Pour tout entier $n \geq 0$, soit*

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\Big(T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}\Big),$$

où $\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ est la mesure associée à la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ et $T_{\frac{1}{n}}$ est l'opération de dilatation définie dans §1.2.4. Alors, pour tout entier $r \geq 2$ et tout $\mathbf{n} = (n_i) \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}^r$, si on note

$N = n_1 + \cdots + n_r$, alors on a l'inégalité

$$NI_N \geq \sum_{i=1}^{r} \Big(n_i I_{n_i} - cf(n_i) \Big).$$

Démonstration. — Pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par ξ_n la mesure équiprobable sur $\Omega_n^{(d)}$, par $\rho_{\mathbf{n}}$ une mesure sur $\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}$ satisfaisant aux conditions du théorème 3.3.1, et par $\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}$ la base de B_N construite comme ci-dessus. En utilisant les notations introduites dans §1.2.2, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} I_N &\geq \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\Big(T_{\frac{1}{N}} \nu_{\mathcal{F}^{(N)}, \mathbf{u}^{(\mathbf{n})}} \Big) = \int_{\Omega_N^{(d)}} g \left(\frac{1}{N} \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(u_\gamma^{(\mathbf{n})}) \right) \mathrm{d}\xi_N(\gamma) \\ &= \int_{\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}} g \left(\frac{1}{N} \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(u_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r}^{(\mathbf{n})}) \right) \mathrm{d}\rho_{\mathbf{n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est parce que l'image directe de $\rho_{\mathbf{n}}$ par l'addition est équiprobable. Comme g est une fonction croissante, d'après la définition de $u_\gamma^{(\mathbf{n})}$, on a

$$I_N \geq \int_{\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}} g \left(\frac{1}{N} \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(u_{\alpha_1}^{(n_1)} \cdots u_{\alpha_r}^{(n_r)}) \right) \mathrm{d}\rho_{\mathbf{n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

Comme l'algèbre B est graduée f-quasi-filtrée et comme g est croissante,

$$I_N \geq \int_{\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}} g \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} \Big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(u_{\alpha_i}^{(n_i)}) - f(n_i) \Big) \right) \mathrm{d}\rho_{\mathbf{n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r).$$

Car la fonction g est c-lipschitzienne,

$$I_N \geq \int_{\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}} \left[g \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(u_{\alpha_i}^{(n_i)}) \right) - \frac{c}{N} \sum_{i=1}^{r} f(n_i) \right] \mathrm{d}\rho_{\mathbf{n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r).$$

Ensuite, la concavité de g implique que

$$I_N \geq \int_{\Omega_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Omega_{n_r}^{(d)}} \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{N} g \left(\frac{\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(u_{\alpha_i}^{(n_i)})}{n_i} \right) \right] \mathrm{d}\rho_{\mathbf{n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) - \frac{c}{N} \sum_{i=1}^{r} f(n_i)$$

Enfin, comme les images directes de $\rho_{\mathbf{n}}$ par les r projections sont des mesures équiprobables, on obtient

$$I_N \geq \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{N} I_{n_i} - \frac{c}{N} \sum_{i=1}^{r} f(n_i).$$

□

Corollaire 3.3.4. — *Avec les notations de la proposition 3.3.3, si la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est bornée supérieurement et si $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)/n = 0$, alors la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.3, la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions du corollaire 1.3.2. On en déduit donc la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$. □

Remarque 3.3.5. — La suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est bornée supérieurement notamment lorsque la fonction g est bornée supérieurement, ou lorsque $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) = O(n)$ $(n \to +\infty)$.

On a établi dans le corollaire précédent la convergence des intégrales pour une famille particulière de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. En fait, l'espace linéaire sur $\mathbb{R}$ engendré par cette famille de fonctions contient un sous-espace qui est dense dans $C_c(\mathbb{R})$ — l'espace des fonctions continues à support compact. Cet argument permet de conclure la convergence vague des mesures.

Proposition 3.3.6. — *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$, *alors la suite de mesures* $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}})_{\geq 1}$ *converge vaguement vers une mesure borélienne.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on note $\nu_n = T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$. Soit G l'ensemble des fonctions boréliennes g sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g soit intégrable par rapport à ν_n et telle que la suite d'intégrales $(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. Le corollaire 3.3.4 (voir aussi la remarque 3.3.5) montre que G contient toutes les fonctions croissantes, concaves, lipschitziennes et bornées supérieurement. L'ensemble G est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions lisses et à support compact sur $\mathbb{R}$. Soit $I = [a, b]$ un intervalle qui contient le support de f. Les fonctions f' et f'' sont aussi lisses et les supports de f' et f'' sont tous contenus dans I. Par conséquent, f' et f'' sont des fonctions bornées. Soient $C = \|f'\|_{\sup}$ et $C' = \|f''\|_{\sup}/2$. Soit h la fonction

$$h(x) = \begin{cases} C'(b-a)(2x-a-b) + C(x-b), & x \leq a, \\ -C'(b-x)^2 + C(x-b), & a < x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

C'est une fonction croissante concave $(2C'(b-a)+C)$-lipschitzienne et bornée supérieurement par 0. Donc $h \in G$. D'autre part, $h + f$ est aussi une fonction croissante concave car, sur $[a, b]$, $h' \geq C$ et $h'' = -2C'$. Elle est de plus $(2C'(b-a)+2C)$-lipschitienne et bornée supérieurement par $\|f\|_{\sup}$. Par conséquent, on a $h + f \in G$. On en déduit $f \in G$. Enfin, comme $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace normé $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$, on a $C_c(\mathbb{R}) \subset G$.

Soit $S : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'opérateur qui associe à chaque fonction continue à support compact g la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_n)_{n\geq 1}$. C'est un opérateur linéaire. De plus, si g est une fonction positive, alors $\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu_n \geq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $S(g) \geq 0$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure borélienne finie ν sur $\mathbb{R}$ telle que $S(g) = \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu$. Par défintion la suite de mesure $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν. □

Remarque 3.3.7. — La limite des mesures obtenue dans la proposition 3.3.6 n'est pas nécessairement une mesure de probabilité : il suffit de considérer le cas où

$B = k[X]$ et $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(X^n) = n^2$. La limite des mesures $T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}} = \delta_n$ est alors nulle. Cependant, si on rajoute une condition supplémentaire que $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) = O(n)$ $(n \to +\infty)$, alors cette mesure limite est effectivement une mesure de probabilité. En effet, dans ce cas-là les suites $(\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ et $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n)_{n\geq 1}$ convergent dans $\mathbb{R}$ (voir les propositions les propositions 3.2.4 et 3.2.6), donc les supports des mesures $T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$ sont uniformément bornés. La proposition 1.2.9 montre donc la mesure limite est une mesure de probabilité.

3.3.3. Variant pseudo-filtré. — Les résultats que l'on a obtenus dans le sous-paragraphe précédent admettent des analogues dans le cas où l'algèbre B est f-pseudo-filtrée. On présent au-dessous un analogue de la proposition 3.3.6.

Proposition 3.3.8. — *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction croissante telle que $\sum\limits_{\alpha\geq 0} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$. Soit $B = k[X_1, \cdots, X_d]$ l'algèbre des polynômes qui est usuellement graduée. Si pour chaque entier $n \geq 1$, B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ de sorte que B devient une algèbre graduée f-pseudo-filtrée, alors la suite de mesures $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}})_{n\geq 1}$ converge vaguement. Si de plus $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) = O(n)$, alors la mesure limite est une mesure de probabilité.*

3.4. Convergence des mesures : cas général

Dans cette section, on démontre le théorème de convergence général par la réduction au cas d'algèbre des polynômes. Une technique classique d'attaquer ce genre de problème est de généraliser le problème aux modules gradués et puis faire appel à la méthode de dévissage, qui est un argument de récurrence. Nous avons déjà utilisé cette technique dans §3.1 pour les algèbres bigraduées. Pourtant, comme on montrera plus loin dans la remarque 3.4.4, la convergence vague des mesures n'est pas nécessairement vraie pour un "module gradué quasi-filtré". En effet, la condition d'être quasi-filtré(e) donne seulement une minoration de la position (i.e. la valeur de la fonction λ) du produit de plusieurs éléments. C'est la structure d'algèbre qui empêche le produit d'aller trop loin dans la filtration.

On fixe dans cette section une algèbre graduée $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ de type fini sur k. On rappelle que, si $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ est un B-module gradué de type fini et non-nul, alors on a l'estimation suivante :

$$\operatorname{rg}_k(M_n) = \frac{c(M)}{(r-1)!}n^{r-1} + o(n^{r-1}), \tag{48}$$

où r est la dimension de M et $c(M)$ est une constante qui ne dépend que de M. Si M est nul, alors par convention $\dim(M) = -\infty$ et $c(M) = 0$. Les énoncés 1) et 2) du lemme 3.1.4 sont vrai pour une suite exacte courte de B-modules de type fini. On suppose que l'espace B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}^{(n)}$. Dans toute la suite de section, si M est un B-module gradué de type fini, on suppose, pour tout entier $n \geq 1$, que l'espace M_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration que l'on ne précise pas. On utilise les conventions présentées dans §1.2.6. Par exemple, l'expression ν_{M_n} désigne la mesure associée à la filtration sous-entendue de M_n.

3.4.1. Condition de convergence vague. —

Définition 3.4.1. — Soit M un B-module gradué de type fini (muni des $\mathbb{R}$-filtrations). On dit que M satisfait à la *condition de convergence vague* et on note $\mathbf{CV}(M)$ si la suite de mesures borélienne $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{M_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement.

D'après la définition, une B-module gradué M de dimension 0 satisfait automatiquement à la condition de convergence vague : $\nu_{M_n} = 0$ pour n suffisamment grand.

On présente au-dessous un lemme qui étudie la condition de convergence vague pour une suite exacte. Ce lemme sera utilisé dans la démonstration du théorème 3.4.3.

Lemme 3.4.2. — *Soit* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de B-modules gradués de type fini munis des filtrations. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,* $0 \longrightarrow M'_n \xrightarrow{\phi_n} M_n \xrightarrow{\pi_n} M''_n \longrightarrow 0$ *est une suite exacte d'espaces filtrés. On note $d' = \dim M'$, $\quad d = \dim M$, $\quad d'' = \dim M''$.*
1) Si $d' > d''$, alors $\mathbf{CV}(M') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$.
2) Si $d'' > d'$, alors $\mathbf{CV}(M'') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$.
3) Si $d' = d''$, alors $\mathbf{CV}(M')$ et $\mathbf{CV}(M'') \Longrightarrow \mathbf{CV}(M)$.

Démonstration. — Si $\dim M' = 0$, alors pour n assez grand, on a $M_n = M''_n$, donc $\mathbf{CV}(M'') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$. Donc la proposition est vraie lorsque $\dim M' = 0$. On peut démontrer de façon similaire que la proposition est vraie lorsque $\dim M'' = 0$. Dans toute le reste de la démonstration, on supposera $\min(d', d'') \geq 1$. On a $d = \max(d', d'')$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\nu'_n = T_{\frac{1}{n}}\nu_{M'_n}, \quad \nu_n = T_{\frac{1}{n}}\nu_{M_n}, \quad \nu''_n = T_{\frac{1}{n}}\nu_{M''_n}$$
$$r'_n = \operatorname{rg} M'_n, \quad r_n = \operatorname{rg} M_n, \quad r''_n = \operatorname{rg} M''_n.$$

Pour n suffisamment grand, r'_n, r_n et r''_n sont strictement positifs et les mesures ν'_n, ν_n et ν''_n sont des mesures de probabilité. En outre, la proposition 1.2.5 montre que

$$\nu_n = \frac{r'_n}{r_n}\nu'_n + \frac{r''_n}{r_n}\nu''_n.$$

D'apèrs (48),

$$r'_n = \frac{c(M')}{(d'-1)!}n^{d'-1} + o(n^{d'-1}), \quad r''_n = \frac{c(M'')}{(d''-1)!}n^{d''-1} + o(n^{d''-1}), \quad r_n = r'_n + r''_n.$$

1) Si $d' > d''$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r'_n}{r_n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{r''_n}{r_n} = 0,$$

donc $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement si et seulement si $(\nu'_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement, et si c'est le cas, elles ont la même limite.

2) Si $d'' > d'$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r'_n}{r_n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{r''_n}{r_n} = 1,$$

donc $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement si et seulement si $(\nu''_n)_{\geq 1}$ converge vaguement, et si c'est le cas, elles ont la même limite.

3) Si $d'' = d'$, alors $c(M) = c(M') + c(M'')$, et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r'_n}{r_n} = \frac{c(M')}{c(M)}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{r''_n}{r_n} = \frac{c(M'')}{c(M)},$$

Si $(\nu'_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν' et si $(\nu''_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers ν'', alors $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers $\dfrac{c(M')}{c(M)}\nu' + \dfrac{c(M'')}{c(M)}\nu''$. □

3.4.2. Théorème de convergence des mesures. — Dans ce sous-paragrphe, on établit le théorème principal de l'article qui affirme la convergence des mesures (dilatées) associées à B. On en déduit ensuite la convergence uniforme des polygones associés.

Théorème 3.4.3. — *Soit $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$. On suppose que*

1) l'algèbre graduée B est intègre et f-quasi-filtrée, et $B_n \neq 0$ pour n assez grand,
2) il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ quel que soit $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\nu_n = T_{\frac{1}{n}}\nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$. Alors les supports des mesures ν_n sont uniformément bornés et la suite de mesures $(\nu_n)_{\geq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Soit n_0 comme dans la définition 3.2.1. D'après [**22**] II.2.1.6, il existe deux entiers $m_0 \geq n_0$ et $d_0 > 0$ tels que, pour tout entier $n \geq m_0$, on ait $B_{d_0+n} = B_{d_0}B_n$. Soit $d = d_0m_0$. L'algèbre graduée $B^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0} B_{nd}$ est engendrée comme une B_0-algèbre par $B_1^{(d)} = B_d$. De plus, si on désigne par $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la fonction telle que $g(n) = f(nd)$, alors l'algèbre graduée $B^{(d)}$ est g-quasi-filtrée. Pour tout entier n assez grand, on a $B_n \neq 0$ et donc $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$. D'après la proposition 3.2.6, la suite $(\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(nd)})/nd)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier $l \in [m_0, m_0 + d[$ et tout entier $n \geq 1$, on a $B_{nd+l} = B_{nd}B_l$. On en déduit $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(nd+l)}) \geq \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(nd)}) + \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(l)}) - f(nd) - f(l)$ (voir la démonstration de la proposition 3.2.6). Par passage à la limite, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(nd+l)})/(nd+l) \geq \lim_{n\to+\infty} \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(nd)})/nd$$

Comme l est arbitraire, on en déduit que $\liminf_{n\to+\infty} \lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n$ existe dans $\mathbb{R}$. Si $B_n \neq 0$, alors le support de ν_n est contenu dans $[\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)})/n, \lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)})/n]$, donc les supports des ν_n sont uniformément bornés.

D'après la proposition 1.2.9, pour démontrer la deuxième assertion du théorème, il suffit d'établir $\mathbf{CV}(B)$. On commence par un cas particulier où l'algébre B est engendrée comme une B_0-algèbre par B_1. La démonstration se décompose en trois étapes:

Étape 1: quelque réductions.

D'abord, par extension des scalaires (voir §1.2.3), en introduisant une extension infinie de k, on peut supposer que k est un corps infini.

Si c est une constante réelle, on peut considérer la filtration $\mathcal{F}^{(n),c}$ sur B_n telle que $\mathcal{F}_t^{(n),c}B_n = \mathcal{F}_{t-cn}^{(n)}B_n$. Autrement dit, pour tout élément $a \in B_n$, on a la relation $\lambda_{\mathcal{F}^{(n),c}}(a) = \lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(a) + cn$. Si $(n_i)_{1\le i\le r} \in \mathbb{Z}^r_{\ge n_0}$ est un multi-indice et si pour tout i, a_i est un élément dans B_{n_i}, en posant $N = n_1 + \cdots + n_r$ et $a = a_1 \cdots a_r$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{F}^{(N),c}}(a) = \lambda_{\mathcal{F}^{(N)}}(a) + cN &\ge \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i)}}(a_i) - f(n_i)\Big) + \sum_{i=1}^r cn_i \\ &= \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_{\mathcal{F}^{(n_i),c}}(a_i) - f(n_i)\Big),\end{aligned}$$

autrement dit, l'algèbre graduée B, munie des filtrations $\mathcal{F}^{(n),c}$, est encore f-quasi-filtrée. D'autre part, si on désigne par $\nu^c_{B_n}$ la probabilité associée à la filtration $\mathcal{F}^{(n),c}$, on a $\nu^c_{B_n} = \tau_{cn}\nu_{B_n}$, où ν_{B_n} est la mesure associée à $\mathcal{F}^{(n)}$. Par conséquent, on a $T_{\frac{1}{n}}\nu^c_{B_n} = T_{\frac{1}{n}}\tau_{cn}\nu_{B_n} = \tau_c T_{\frac{1}{n}}\nu_{B_n}$. Autrement dit, B satisfait à la condition de convergence vague pour les filtrations $\mathcal{F}^{(n)}$ si et seulement si c'est le cas pour les filtrations $\mathcal{F}^{(n),c}$. En remplaçant les filtrations $\mathcal{F}^{(n)}$ par $\mathcal{F}^{(n),c}$ avec c suffisamment grand, on se ramène au cas où $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(n)}) - f(n) \ge 0$ pour tout $n \ge 1$. En particulier, pour tout élément homogène a de degré n de B, $\lambda_{\mathcal{F}^{(n)}}(a) \ge f(n)$.

Étape 2: Comme k est un corps infini, par la normalisation de Noether (cf. [**16**] Théorème 13.3), il existe d éléments $x_1, \cdots, x_d$ dans B_1 tels que

1) l'homomorphisme de l'algèbre de polynômes $k[T_1, \cdots, T_d]$ vers B qui envoie T_i en x_i soit un isomorphisme de k-algèbres graduées de $k[T_1, \cdots, T_d]$ sur son image.
2) si on désigne par A cette image, c'est-à-dire la sous-k-algèbre de B engendrée par $x_1, \cdots, x_d$, alors B soit un A-module gradué de type fini.

L'algèbre A, munie des filtrations induites, est une k-algèbre graduée f-quasi-filtrée. La proposition 3.3.6 montre que l'on a $\mathbf{CV}(A)$.

Soit a un élément homogène de A. Alors Aa est un sous-A-module gradué de B. On munit Aa des filtrations induites (de celles de B). Comme $\dim A/Aa < \dim A$, on a $\mathbf{CV}(Aa)$ compte tenu du lemme 3.4.2. De plus, les suites de mesures de probabilité $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{A_n})_{n\geq 1}$ et $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{(Aa)_n})_{n\geq 1}$ convergent vaguement vers la même limite.

Si x est un élément homogène de degré $m>0$ dans B, alors il existe un polynôme unitaire $P\in A[X]$ de degré $p\geq 1$ tel que $P(x)=0$. On suppose que P est de degré minimal et s'écrit sous la forme $P(X)=X^p+a_{p-1}X^{p-1}+\cdots+a_0$. Comme P est minimal et comme B est un anneau intègre, a_0 est non-nul. Pour tout $i\in\{0,\cdots,p-1\}$, soit $\widetilde{a}_i$ la composante de degré $(p-i)m$ de a_i. Si on note

$$\widetilde{P}(X)=X^p+\widetilde{a}_{p-1}X^{p-1}+\cdots+\widetilde{a}_0,$$

alors on a $\widetilde{P}(x)=0$ puisque x est homogène de degré m. On peut donc supposer que a_i est homogène de degré $(p-i)m$ quel que soit $i\in\{0,\cdots,p-1\}$. Soit $y=x^{p-1}+a_{p-1}x^{p-2}+\cdots+a_1$. Il est homogène de degré $(p-1)m$. En outre, on a $xy+a_0=0$. Dans la suite, on utilise les notations simplifiées introduites dans §1.2.6 pour les fonctions λ. Puisque l'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée, si u est un élément homogène de degré n de A, alors

$$\lambda(ua_0)=\lambda(uxy)\geq\lambda(ux)-f(n+m)+\lambda(y)-f((p-1)m)\geq\lambda(ux)-f(n+m),\tag{49}$$

où dans la dernière inégalité, on a utilisé l'hypothèse $\lambda_{\min}(\mathcal{F}^{(p-1)m})\geq f((p-1)m)$ introduite dans l'étape 1. On en déduit $\lambda(ux)\leq\lambda(ua_0)+f(n+m)$. En outre,

$$\lambda(ux)\geq\lambda(u)+\lambda(x)-f(m)-f(n)\geq\lambda(u)-f(n).\tag{50}$$

Soient $M=Aa_0$, $M'=Ax$. L'algèbre B étant intègre, pour tout entier $n\geq 1$, l'application $ux\mapsto ua_0$ $(u\in A_n)$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels de M'_{n+m} vers M_{n+mp}. D'après (49) et le lemme 1.2.6, on a $\nu_{M'_{n+m}}\prec\tau_{f(n+m)}\nu_{M_{n+mp}}$. D'autre part, l'application $u\mapsto ux$ $(u\in A_n)$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels de A_n vers M'_{n+m}. D'après (50) et le lemme 1.2.6, on obtient $\nu_{A_n}\prec\tau_{f(n)}\nu_{M'_{n+m}}$, ou encore $\tau_{-f(n)}\nu_{A_n}\prec\nu_{M'_{n+m}}$. On obtient donc l'encadrement

$$\tau_{-f(n)}\nu_{A_n}\prec\nu_{M'_{n+m}}\prec\tau_{f(n+m)}\nu_{M_{n+mp}},$$

et donc

$$T_{\frac{1}{n+m}}\tau_{-f(n)}\nu_{A_n}\prec T_{\frac{1}{n+m}}\nu_{M'_{n+m}}\prec T_{\frac{1}{n+m}}\tau_{f(n+m)}\nu_{M_{n+mp}},$$

ou encore

$$\tau_{-f(n)/(n+m)}T_{\frac{n}{n+m}}T_{\frac{1}{n}}\nu_{A_n}\prec T_{\frac{1}{n+m}}\nu_{M'_{n+m}}\prec\tau_{f(n+m)/(n+m)}T_{\frac{n+mp}{n+m}}T_{\frac{1}{n+mp}}\nu_{M_{n+mp}}.\tag{51}$$

Comme observé plus haut, les suites $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{A_n})_{n\geq 1}$ et $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{M_n})_{n\geq 1}$ convergent vaguement vers une même limite que l'on note ν. D'après le lemme 1.2.11, l'encadrement (51), et le lemme 1.2.12, on conclut que la suite $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{M'_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement aussi vers ν.

Étape 3: Soit k' le corps des fractions de A. Comme B est une algèbre finie sur A, l'algèbre $k'\otimes_A B$ est de rang fini sur k'. Le A-module B est engendré par les éléments homogènes, il existe donc des éléments homogènes $x_1,\cdots,x_s$ de B qui forment une base de $k'\otimes_A B$ sur k'. Si on note $H = Ax_1+\cdots+Ax_s$, alors H est un sous-A-module libre de base $(x_1,\cdots,x_s)$ de B. Soit $H' = B/H$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\pi} H' \longrightarrow 0\ .$$

Comme $1\otimes\psi : k'\otimes_A H \to k'\otimes_A B$ est un isomorphisme, on a $k'\otimes_A H' = 0$, donc H' est un A-module de torsion. On a alors $\dim_A H' < \dim A = \dim_A H = \dim_A B$. D'après l'étape 2, la condition $\mathbf{CV}(Ax_i)$ est vérifiée pour tout $1\leq i\leq s$. D'après le lemme 3.4.2, on a $\mathbf{CV}(H)$ et puis $\mathbf{CV}(B)$. Le théorème est donc démontré pour le cas particulier où B est engendrée comme une B_0-algèbre par B_1.

On retourne maintenant au cas général. Comme remaqué au debut de la démonstration, il existe un entier $d>0$ tel que $B^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0} B_{dn}$ soit une B_0-algèbre engendrée par $B_1^{(d)} = B_d$. C'est un anneau intègre. De plus, elle est g-quasi-filtrée pour la fonction $g(n) = f(nd)$. D'après le résultat déjà démontré, on a $\mathbf{CV}(B^{(d)})$. On désigne par ρ la limite de $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{B_{nd}})_{n\geq 1}$. En outre, l'algèbre B, vue comme une $B^{(d)}$-algèbre, est finie sur $B^{(d)}$. D'après un argument similaire à l'étape 2, pour tout élément homogène non-nul x de B, $B^{(d)}x$ satisfait à la condition de convergence vague, et la suite des probabilités $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{B_{nd}x})_{n\geq 1}$ converge aussi vers ρ. On suppose que $B_n\neq 0$ pour tout $n\geq m$, où $m\in\mathbb{N}$. Alors pour tout entier l tel que $m\leq l<m+d$, le $B^{(d)}$-module $B^{(d,k)} = \bigoplus_{n\geq 0} B_{nd+k}$ est non-nul. D'après un arguement similaire à l'étape 3, en utilisant le fait que $B^{(d)}$ est un anneau intègre, on conclut que $B^{(d,k)}$ satisfait à la condition de convergence vague, et que la limite de la suite $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{B_{nd+k}})_{n\geq 1}$ coïncide avec ρ. Enfin, en combinant ces suites de probabilités et en s'appuyant sur le lemme 1.2.11, on conlure que la suite de probabilités $(T_{\frac{1}{n}}\nu_{B_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement vers $T_{\frac{1}{d}}\rho$. □

Remarque 3.4.4. — 1) La condition d'être quasi-filtré peut s'étendre facilement au cas de module gradué. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ une application. On suppose que l'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée. Soit M un B-module gradué muni des filtrations $(\mathcal{G}^{(n)})_{n\geq 1}$. On dit que M est f-quasi-filtré s'il existe un entier $n_0>0$ tel que, pour tout entier $r>0$, tout $(n_i)_{1\leq i\leq r+1}\in\mathbb{Z}_{\geq n_0}^{r+1}$ et tout $(s_i)_{1\leq i\leq r+1}\in\mathbb{R}^{r+1}$, on ait

$$\Big(\prod_{i=1}^{r}\mathcal{F}_{s_i}^{(n_i)}B_{n_i}\Big)\mathcal{G}_{s_{r+1}}^{(n_{r+1})}M_{n_{r+1}}\subset\mathcal{G}_S^{(N)}M_N,\quad \text{où } N=\sum_{i=1}^{r+1}n_i \text{ et } S=\sum_{i=1}^{r+1}(s_i-f(n_i)).$$

Si $f\equiv 0$, M est dit filtré. Cepedent, l'assertion du théorème 3.4.3 n'est pas vraie en général pour un module gradué (quasi-)filtré. En effet, soit B l'algèbre $K[X]$ des polynômes à une variable munie de la graduation usuelle et de la filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ telle que

$$\mathcal{F}_t^{(n)}B_n = \begin{cases} B_n, & \text{si } t\leq 0,\\ 0, & \text{si } t>0.\end{cases}$$

Evidemment B est une K-algèbre graduée filtrée. Soit M le B-module gradué libre engendré par un élément homogène de degré 0. Soit $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit une filtration $\mathcal{G}^{\varphi,(n)}$ sur M_n telle que

$$\mathcal{G}_t^{\varphi,(n)} M_n = \begin{cases} M_n, & \text{si } t \leq \varphi(n), \\ 0, & \text{si } t > \varphi(n). \end{cases}$$

Alors M est un B-module gradué filtré et, pour tout entier $n \geq 0$, $\nu_{M_n} = \delta_{\varphi(n)}$. La condition $\mathbf{CV}(M)$ est équivalente à l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n)/n$ dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Si $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que la suite $(\varphi(n)/n)_{n\geq 1}$ ait plusieurs points adhérents — par exemple, $\varphi(n) = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, $\mathbf{CV}(M)$ n'est plus satisfaite. Ce contre-exemple montre l'impossibilité de démontrer le théorème 3.4.3 par la version classique de la technique de dévissage.

2) L'assertion du théorème 3.4.3 n'est pas vraie en général pour une algèbre graduée quasi-filtrée non-intègre. Soient B et M comme dans 1) plus haut. Si on désigne par C l'extension nilpotente de B par M (cf. [**30**] chap. 9 §25), alors C est une algèbre graduée quasi-filtrée sur K, mais la condition $\mathbf{CV}(C)$ n'est pas vraie. La même construction founit aussi un contre-exemple de la proposition 3.2.4 lorsque l'algèbre B n'est pas intègre.

Corollaire 3.4.5. — *Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.4.3, la suite de polygones* $(\mathcal{P}(\nu_n))_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers une fonction concave sur* $[0,1]$.

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème 3.4.3 et de la proposition 1.2.9. ☐

3.4.3. Variante pseudo-filtrée. — On présente enfin la version pseudo-filtrée du théorème 3.4.3.

Théorème 3.4.6. — *Soit* $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *une fonction croissante telle que* $\sum\limits_{\alpha\geq 0} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$. *On suppose que*

1) l'algèbre graduée B *est intègre et* f*-pseudo-filtrée, et* $B_n \neq 0$ *pour* n *assez grand,*

2) il existe $\alpha > 0$ *tel que* $\lambda_{\max}(\mathcal{F}^{(n)}) \leq \alpha n$ *quel que soit* $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, *soit* $\nu_n = T_{\frac{1}{n}} \nu_{\mathcal{F}^{(n)}}$. *Alors les supports des mesures* ν_n *sont uniformément bornés et la suite de mesures* $(\nu_n)_{\geq 1}$ *converge vaguement vers une mesure de probabilité borélienne sur* $\mathbb{R}$. *Donc la suite de polygones* $(\mathcal{P}(\nu_n))_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

4.1. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique

Le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique étudie le comportement asymptotique des caractéristiques d'Euler-Poincaré des images directes des puissances tensoriels d'un fibré inversible hermitien sur une variété arithmétique. Ce théorème était d'abord démontré par Gillet et Soulé [**20**] en utilisant leur théorème de Riemann-Roch arithmétique. Puis il a été reétdudié par plusieurs auteurs comme Abbes et Bouche [**1**], Zhang [**38**], Rumely, Lau et Varley [**34**], Autissier [**2**] et Randriambololona [**31**] dans divers contextes. Dans le cas où la métrique sur le fibré inversible hermitien est positive, ce comportement asymptotique peut être interprété par le nombre d'intersection du fibré inversible hermitien considéré.

Dans cette section, on applique la convergence de polygones à l'étude du théorème de Hilbert-Samuel. Comme le résultat précédemment établi est très général, on obtient le théorème de Hilbert-Samuel (la partie de convergence) dans toute généralité sans condition de positivité sur la métrique.

4.1.1. Algèbre en fibrés adéliques hermitiens. — Soient K un corps de nombres et $B=\bigoplus_{n\geq 0}B_n$ une algèbre intègre et de type fini sur K telle que $B_n\neq 0$ pour n suffisamment grand. On suppose que B_n est l'espace vectoriel sous-jacent d'un fibré adélique hermitien $\overline{B}_n$ sur $\operatorname{Spec}K$. Pour tout entier $r\geq 2$ et tout élément $\mathbf{n}=(n_i)_{1\leq i\leq r}\in\mathbb{N}^r$, on désigne par $\psi_{\mathbf{n}}:B_{n_1}\otimes\cdots\otimes B_{n_r}\rightarrow B_{|\mathbf{n}|}$ l'application K-linéaire induite par la structure de K-algèbre de B, où $|\mathbf{n}|=n_1+\cdots+n_r$.

Théorème 4.1.1. — *Avec les notations comme ci-dessus, s'il existe $\alpha>0$ tel que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}_n)\leq\alpha n$ pour n suffisamment grand et si l'une des deux conditions suivantes est vérifée :*

1) *il existe une fonction $g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ et un entier $n_0>0$ tels que $\displaystyle\lim_{n\rightarrow+\infty}g(n)/n=0$ et que $h(\psi_{\mathbf{n}})\leq g(n_1)+\cdots+g(n_r)$ quels que soient $r\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\geq n_0}^r$,*

2) il existe une fonction croissante $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et un entier* $n_0 > 0$ *tels que* $\sum_{\alpha \geq 0} g(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$ *et que* $h(\psi_{(n,m)}) \leq g(n) + g(m)$ *quels que soient les entiers* n *et* m *supérieurs ou égaux à* n_0,

alors la suite de polygones $(\mathcal{P}_{\overline{B}_n}/n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers une fonction concave sur* $[0,1]$*, et la suite de pentes maximales* $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}_n)/n)_{n\geq 1}$ *converge dans* $\mathbb{R}$*. Si de plus* $\psi_{(n,m)}$ *est surjectif pour* n *et* m *assez grand, alors la suite de pentes minimales* $(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{B}_n)/n)_{n\geq 1}$ *converge aussi dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — 1) On démontre d'abord que l'algèbre graduée B est f-quasi-filtrée pour $f(n) = g(n) + \log(\operatorname{rg} B_n)$ sous la première condition. En effet, si $(s_i)_{1\leq i\leq r}$ est un élément dans $\mathbb{R}^r$, alors on a l'inégalité

$$\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}^{(n_1)}_{s_1} B_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{(n_r)}_{s_r} B_{n_r}) \geq \sum_{i=1}^r \Big(\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}^{(n_i)}_{s_i} B_{n_r}) - \log(\operatorname{rg} B_{n_r})\Big)$$

compte tenu de l'inégalité (27). D'après la proposition 2.2.1, on obtient

$$\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}^{(n_1)}_{s_1} B_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{(n_r)}_{s_r} B_{n_r}) \geq \sum_{i=1}^r \big(s_i - \log(\operatorname{rg} B_{n_r})\big)$$

Par conséquent, $\psi_{\mathbf{n}}(\mathcal{F}^{(n_1)}_{s_1} B_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{(n_r)}_{s_r} B_{n_r})$ est contenu dans $\mathcal{F}^{(|\mathbf{n}|)}_t B_{|\mathbf{n}|}$ où $t = \sum_{i=1}^r \big(s_i - \log(\operatorname{rg} B_{n_i})\big) - h(\psi_{|\mathbf{n}|})$ (cf. la proposition 2.2.4 *infra*). Cela montre que B est f-quasi-filtrée. Comme $\operatorname{rg} B_n$ croît polynomialement par rapport à n, on obtient $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$. D'après le corollaire 3.4.5, les polygones $\mathcal{P}(T_{\frac{1}{n}}\nu_{\overline{B}_n}) = \mathcal{P}_{\overline{B}_n}/n$ convergent uniformément quand $n \to +\infty$. De même, les convergences des pentes extrémales résultent respectivement des propositions 3.2.4 et 3.2.6.

2) La démonstration du deuxième cas est très similaire à celle du premier cas, en utilisant la variante pseudo-filtrée. En effet, la fonction $\log(\operatorname{rg} B_n)$ est de croissance logarithmique. Comme $\sum_{\alpha\geq 0} \log(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, on obtient la proposition en s'appuyant sur le théorème 3.4.6 et les propositions 3.2.9 et 3.2.10. □

Corollaire 4.1.2. — *Avec les notations du théorème 4.1.1, la suite des pentes normalisées* $(\widehat{\mu}(\overline{B}_n)_{n\geq 1})$ *converge dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 4.1.3. — Bien que on a supposé dans le théorème 4.1.1 que les fibrés vectoriels adéliques $\overline{B}_n$ sont hermitiens, le polygone limite et les pentes extrémales limites ont un sens pour le cas général. Si $\overline{B}_n$ est un fibré vectoriel adélique, alors il exite un fibré adélique hermitien $\overline{B}'_n$ ayant B_n comme espace vectoriel sous-jacent et tel que la hauteur de l'application d'identité $\overline{B}_n \to \overline{B}'_n$ est dans $[-\log(\operatorname{rg} B_n), \log(\operatorname{rg} B_n)]$ (cf. la proposition 4.1.1 *infra*). L'inégalité de pentes (22) montre que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}_n) = O(n)$ si et seulement si $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}'_n) = O(n)$. Le fibré adélique hermitien $\overline{B}'_n$ n'est pas nécessairement unique, mais si $\overline{B}''_n$ est un autre tel fibré adélique hermitien, alors la hauteur de l'application d'identité $\overline{B}'_n \to \overline{B}''_n$ est dans $[-2\log(\operatorname{rg} B_n), 2\log(\operatorname{rg} B_n)]$. Par conséquent, on a $\|\mathcal{P}_{\overline{B}'_n} - \mathcal{P}_{\overline{B}''_n}\|_{\sup} \leq 2\log(\operatorname{rg} B_n)$, $|\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}'_n) - \widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}''_n)| \leq 2\log(\operatorname{rg} B_n)$ et $|\widehat{\mu}_{\min}(\overline{B}'_n) - \widehat{\mu}_{\min}(\overline{B}''_n)| \leq 2\log(\operatorname{rg} B_n)$. Si l'assertion du théorème 4.1.1 est vérifée pour les $\overline{B}'_n$, alors la même assertion est vérifiée pour les $\overline{B}''_n$, et les limites sont les mêmes.

Remarque 4.1.4. — Le corollaire 4.1.2 implique un résultat de convergence pour les caractéristiques d'Euler-Poincaré. En effet, d'après 2.1.4, il existe une constante α tel que $\chi(\overline{K}^m) \leq \alpha m(\log m + 1)$ quel que soit $m \geq 1$. On en déduit donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi(\overline{K}^{\operatorname{rg} B_n})/n \operatorname{rg} B_n = 0$. D'après la relation entre le degré d'Arakelov et la caractéristique d'Euler-Poincaré (16), on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \chi(\overline{B}_n)/n \operatorname{rg} B_n = \lim_{n\to+\infty} [K:\mathbb{Q}]\widehat{\mu}(\overline{B}_n)/n$$

existe dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(d+1)!}{n^{d+1}}\chi(\overline{B}_n)$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette convergence est aussi valable pour le cas où les $\overline{B}_n$ sont des fibrés vectoriels adéliques, grâce à la remarque 4.1.3.

4.1.2. Existence de la capacité sectionnelle. — Le théorème 4.1.1 peut être comparé avec le théorème (A) de [**34**]. Soient X un schéma intègre projectif de dimension d définie sur K et L un fibré inversible sur X. Si chaque espace des sections globales $\Gamma(X, L^{\otimes n})$ est muni des normes de sorte que $\overline{\Gamma(X, L^{\otimes n})}$ soit un fibré vectoriel adélique, on dit que $\overline{L}$ est un *fibré inversible avec sections normées*. La capacité sectionnelle de $\overline{L}$ est par définition

$$S_\gamma(\overline{L}) = \exp\Big(-\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}}\chi(\overline{\Gamma(X, L^{\otimes n})})\Big)$$

pourvu que la limite dans le terme à droit existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette notion est d'abord introduite par Chiburg [**15**]. Elle généralise en même temps deux notions : la capacité logarithmique d'un diviseur ample dans X et le nombre d'auto-intersection d'un fibré inversible hermitien arithmétiquement ample. L'existence de la capacité est étudiée par plusieur auteurs dans une série d'articles comme [**15, 32, 33, 34**]. En particulier, cette existence est démontrée dans [**34**] à une grande généralité avec eventuellement des semi-normes sur $\Gamma(X, L^{\otimes n})$.

Le théorème 4.1.1 donne un critère d'existence de la capacité sectionnelle.

Corollaire 4.1.5. — *Si l'algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes n})$ est de type fini sur K (cette condition est vérifiée notamment lorsque L est ample) et si les fibrés adéliques hermitiens $\overline{\Gamma(X, L^{\otimes n})}_{\text{Löwner}}$ (voir 2.1.12 pour la notation) vérifient les conditions du théorème 4.1.1, alors la capacité sectionnelle $S_\gamma(\overline{L})$ existe et est non-nul.*

Remarque 4.1.6. — Dans [**34**], les auteurs ont obtenu l'existence de la capacité sectionnelle sous des hypothèses de compatibilité et de finitude pour les métriques. En particulier, l'une des conditions de compatibilité algébrique (A1),

$\|f\otimes g\|_v \leq \|f\|_v\|g\|_v$ *quels que soient* $v\in\Sigma_f\cup\Sigma_\infty$, $f\in K_v\otimes\Gamma(X,L^{\otimes n})$ *et* $g\in K_v\otimes\Gamma(X,L^{\otimes m})$,

implique les conditions 1) et 2) du théorème 4.1.1. En effet, si on note $B_n=\Gamma(X,L^{\otimes n})$, alors pour toute place infinie v, $B_{n_1,\mathbb{C}_v}\otimes\cdots\otimes B_{n_r,\mathbb{C}_v}$ contient une base orthonormée formée d'éléments de la forme $s_1\otimes\cdots\otimes s_r$, où s_i est un élément dans $B_{n_i,\mathbb{C}_v}$. La condition de compatibilité algébrique comme ci-dessus montre alors que la hauteur locale de $\psi_{\mathbf{n}}$ en v, qui est par définition $\log\|\psi_{\mathbf{n},v}\|_v$, est majorée par

$$\frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}(B_{n_1}\otimes\cdots\otimes B_{n_r}))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r\log(\operatorname{rg}B_{n_i}).$$

D'autre part, la capacité sectionnelle est justifiée d'être strictement positive pourvue que la condition de croissance suivante dans [**34**] theorem (A) est vérifiée :

$$\textit{il existe } \epsilon>0 \textit{ tel que } \inf_{0\neq f\in\Gamma(X,L^{\otimes n})}\prod_v\|f\|_v\geq\epsilon^n.$$

Mais cette condition n'est rien d'autre que la condition $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{B}_n)=O(n)$ dans le théorème 4.1.1 compte tenu de la comparaison du premier minimum avec la pente maximale, établie dans [**19**] théorème 5.20. Enfin, le point de vue algébrique que l'on a adopté permet d'obtenir le corollaire 4.1.5 pour le cas où L est éventuellement non-ample.

4.1.3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique. — Soient $\mathscr{X}$ un schéma intègre, projectif et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et $\mathscr{L}$ un fibré inversible sur $\mathscr{X}$ tel que $L:=\mathscr{L}_K$ est ample. Soient $X=\mathscr{X}_K$ et $d=\dim X$. Pour chaque plongement $\sigma:K\to\mathbb{C}$, on choisit une métrique hermitien $\|\cdot\|_\sigma$ sur $\mathscr{L}_{\sigma,\mathbb{C}}$, qui est un faisceau inversible sur la variété analytique complexe $X_\sigma(\mathbb{C})$. On suppose que les métriques $\|\cdot\|_\sigma$ sont continues et sont invariantes par la conjugaison complexe. Pour tout entier $n\geq 0$, soit $\mathcal{E}_n=\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$, où $\pi:\mathscr{X}\to\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est le morphisme structurel. Soit en outre $E_n=\mathcal{E}_{n,K}=\Gamma(X,L^{\otimes n})$. Pour tout plongement $\sigma:K\to\mathbb{C}$, on désigne par $\|\cdot\|_{\sigma,\sup}$ la norme sur $E_{n,\sigma}:=E_n\otimes_{K,\sigma}\mathbb{C}=\Gamma(X_{\sigma,\mathbb{C}},L_{\sigma,\mathbb{C}}^{\otimes n})$ telle que $\|s\|_{\sigma,\sup}=\sup_{x\in\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})}\|s_x\|_\sigma$. Ce n'est pas une norme hermitienne en générale. D'après les résultats dans §2.1.6, on peut toujours choisir une norme hermitienne $\|\cdot\|_\sigma$ invariante par conjugaison complexe et telle que

$$\|s\|_\sigma\leq\|s\|_{\sigma,\sup}\leq\sqrt{\operatorname{rg}E_n}\|s\|_\sigma \tag{52}$$

On obtient ainsi un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}_n$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ qui correspond à un fibré adélique hermitien $\overline{E}_n$ sur $\operatorname{Spec}K$ (cf. la remarque 2.1.7 *infra*).

Lemme 4.1.7. — *Soit* $\mathbf{n}=(n_1,\cdots,n_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ *une famille finie d'indices. Si on désigne par* $\psi_{\mathbf{n}}: E_{n_1}\otimes\cdots\otimes E_{n_r}\to E_{|\mathbf{n}|}$ *l'application* K*-linéaire induite par la multiplication de sections, alors*

$$h(\psi_{\mathbf{n}})\leq\sum_{i=1}^r\log(\operatorname{rg}E_{n_i}). \tag{53}$$

Démonstration. — Comme $\psi_{\mathbf{n}}$ est obtenu d'un homomorphisme $\mathcal{O}_K$-linéaire par extension de scalaire à K, $\|\psi_{\mathbf{n},\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}\leq 1$ quelle que soit $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$. Si $(s_i)_{1\leq i\leq r}$ est un élément dans $E_{n_1,\sigma}\times\cdots\times E_{n_r,\sigma}$,, alors

$$\log\|s_1\cdots s_r\|_\sigma\leq\log\|s_1\cdots s_r\|_{\sigma,\sup}\leq\sum_{i=1}^r\log\|s_i\|_{\sigma,\sup}$$
$$\leq\sum_{i=1}^r\Big(\log\|s_i\|_\sigma+\frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}E_{n_i})\Big)=\log\|s_1\otimes\cdots\otimes s_r\|_\sigma+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r\log(\operatorname{rg}E_{n_i}).$$

Comme $E_{n_1,\sigma}\otimes\cdots\otimes E_{n_r,\sigma}$ contient une base orthonormée formée d'éléments dans $E_{n_1,\sigma}\times\cdots\times E_{n_r,\sigma}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'estimation (53). □

On rappelle au-dessous un résultat de Bost et Künnemann (cf. [**8**] proposition 3.3.1), qui est une reformulation du premier théorème de Minkowski dans le cadre des fibrés vectoriels hermitiens. Si $\overline{\mathcal{E}}=(\mathcal{E},(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ un fibré vecotiel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on désigne par $\varepsilon(\overline{\mathcal{E}})$ le nombre réel

$$\varepsilon(\overline{\mathcal{E}}):=\inf_{0\neq s\in\mathcal{E}}\Big(\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_\sigma^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{54}$$

Proposition 4.1.8. — *Les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}})-\frac{1}{2}\log([K:\mathbb{Q}]\operatorname{rg}\mathcal{E})-\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\leq-\log\varepsilon(\overline{\mathcal{E}}) \tag{55}$$

$$-\log\varepsilon(\overline{\mathcal{E}})\leq\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}})-\frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}]. \tag{56}$$

On démontre que la suite $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n))_{n\geq 1}$ est bornée supérieurement par une suite linéaire. D'après (55), il suffit de minorer la norme du plus petit vecteur non-nul dans $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes n})$. Cela est achevé en utilisant le fait que la hauteur d'un cycle effectif par rapport à un fibré inversible hermitien arithmétiquement ample est postive ou nulle. On rappelle d'abord quelques notions.

Définition 4.1.9. — Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit qu'une section $s\in H^0(\mathscr{X},\mathcal{E})$ est *effective* si $\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_{\sigma,\sup}\leq 1$. On dit que s est *strictement effective* si l'inégalité est stricte, c'est-à-dire $\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_{\sigma,\sup}<1$.

Remarque 4.1.10. — Soient $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$, s une section dans $H^0(\mathscr{X},\mathcal{E})$ et $\varphi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathcal{E}$ l'homomorphisme induit par s. Si on munit $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$ des métriques hermitiennes habituelles, alors s est effective si et seulement si $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma \leq 1$; elle est strictement effecitve si et seulement si $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$.

***Définition 4.1.11* (cf. [38], voir aussi [35]).** — Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{\mathcal{L}}$ est *arithmétiquement ample* si, pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, il existe un entier $a(n) > 0$ et un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}^{\oplus a(n)}$ vers $\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}$ qui est induit par des sections strictement effectives.

Remarque 4.1.12. — Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. Si $\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample, alors $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible ample. D'après [**7**] proposition 3.2.4, si une puissance tensorielle de $\mathcal{L}$ est engendrée par ses sections globales effectives et si $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ est strictement positive, alors pour tout cycle effectif $Z \in Z_q(\mathscr{X})$, $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Z) := \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^q Z) \geq 0$. Zhang [**38**] a démontré que pour que $\overline{\mathcal{L}}$ soit arithmétiquement ample, il suffit que (en considérant $\mathscr{X}$ comme un schéma sur $\mathbb{Z}$)

1) $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ est ample et $\overline{\mathcal{L}}$ est relativement semipositif,
2) pour tout sous-schéma fermé irréductible $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{X}$ qui est plat sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, la hauteur $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathscr{Y}})^{\dim\mathscr{Y}}$ est strictement positive.

En particulier, si $\mathcal{L}$ est ample, si $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ est strictement positive et s'il existe une puissance $\mathcal{L}^{\otimes n}$ de $\mathcal{L}$ qui est engendrée par ses sections effectives sur $\mathscr{X}$, alors $\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample.

Lemme 4.1.13. — *Il existe une constante C telle que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n) \leq Cn$ pour tout entier n suffisamment grand.*

Démonstration. — Soit $\overline{\mathscr{L}'}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ arithmétiquement ample et tel que $c_1(\overline{\mathscr{L}'}) > 0$. Si s est une section non-nul de $\mathscr{L}^{\otimes n}$ sur $\mathscr{X}$, alors $\operatorname{div}s$ est un diviseur effectif de $\mathscr{X}$. Par conséquent

$$h_{\overline{\mathscr{L}'}}(\operatorname{div}s) = \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}'})^d\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) + \int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})}\log\|s\| c_1(\overline{\mathscr{L}'})^d \geq 0.$$

En outre, comme $c_1(\overline{\mathscr{L}'})$ est strictement positive, on obtient

$$\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})}\log\|s\| c_1(\overline{\mathscr{L}'})^d \leq \max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_{\sigma,\sup}\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} c_1(\overline{\mathscr{L}'})^d.$$

Si on note

$$C_1 = \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}'})^d\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})\left(\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} c_1(\overline{\mathscr{L}'})^d\right)^{-1},$$

on obtient $-\max_\sigma \log \|s\|_{\sigma,\sup} \le C_1 n$, qui implique

$$-\log\|s\|_\sigma \le -\log\|s\|_{\sigma,\sup} + \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg} E_n) \le C_1 n + \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg} E_n)$$

quel que soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. D'après la proposition 4.1.8, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n) &\le -\inf_{0\neq s\in\mathcal{E}_n}\frac{1}{2}\log\Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s\|_\sigma^2\Big) + \frac{1}{2}\log([K:\mathbb{Q}]\operatorname{rg} E_n) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\\ &\le C_1 n + \log(\operatorname{rg} E_n) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]} = O(n).\end{aligned}$$

□

Le théorème 4.1.1 (voir aussi les remarques 4.1.3 et 4.1.4) conduit à la convergence de plusieurs invariants arithmétiques associés aux $\overline{E}_n$.

Théorème 4.1.14. — *Avec les notations ci-dessus,*

1) *la suite de polygones de Harder-Narasimhan $(\mathcal{P}_{\overline{E}_n}/n)_{n\ge1}$ converge uniformément vers une fonction concave $\mathcal{P}^\pi_{\overline{\mathscr{L}}}$ qui ne dépend que de $\overline{\mathscr{L}}$;*
2) *les suites $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n)/n)_{n\ge1}$ et $(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_n)/n)_{n\ge1}$ convergent respectivement vers deux nombres réels $\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ et $\widehat{\mu}^\pi_{\min}(\overline{\mathscr{L}})$ qui ne dépendent que de $\overline{\mathscr{L}}$;*
3) *on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(d+1)!}{n^{d+1}}\chi(\mathcal{E}_n,(\|\cdot\|_{\sigma,\sup})) = [K:\mathbb{Q}](d+1)c_1(L)^d\mathcal{P}^\pi_{\overline{\mathscr{L}}}(1).$$

En particulier, si $\overline{\mathscr{L}}$ est arithmétiquement ample, $\mathcal{P}^\pi_{\overline{\mathscr{L}}}(1) = \dfrac{\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}}{[K:\mathbb{Q}](d+1)c_1(L)^d}$.

Démonstration. — Les lemmes 4.1.7 et 4.1.13 montrent que les fibrés vectoriels hermitiens $\overline{E}_n$ satisfont aux conditions du théorème 4.1.1, on obtient donc 1) et 2). Enfin, l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty}\chi(\overline{E}_n)/n\operatorname{rg} E_n = [K:\mathbb{Q}]\lim\limits_{n\to+\infty}\widehat{\mu}(\overline{E}_n)/n$ (cf. la remarque 4.1.4 *infra*) et un résultat de Zhang ([**38**] Theorem 1.4) impliquent 3). □

4.2. Pente maximale asymptotique

On garde les notations de §4.1.3. Dans le théorème 4.1.4 a été établie l'existence du polygone asymptotique $\mathcal{P}^\pi_{\overline{\mathscr{L}}}$ et des pentes extrémales asymptotiques $\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ et $\widehat{\mu}^\pi_{\min}(\overline{\mathscr{L}})$. De plus, on a vu que la pente asymptotique $\widehat{\mu}^\pi(\overline{\mathscr{L}}) := \mathcal{P}^\pi_{\overline{\mathscr{L}}}(1)$ est une généralisation du nombre d'intersection normalisé $\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}/[K:\mathbb{Q}](d+1)c_1(L)^d$. Dans cette section, on étudie l'interprétation géométrique de la pente maximale asymptotique $\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$.

4.2.1. Sur-additivité de la pente maximale asymptotique. — On vérifie que la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ définie dans le théorème 4.1.14 est sur-additive par rapport à $\overline{\mathscr{L}}$. Dans la suite, si $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. On désigne par $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}) = (\pi_*\mathscr{L}, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ le $\mathcal{O}_K$-module projectif $\pi_*\mathscr{L}$ muni des métriques de Löwner associées aux normes $\|\cdot\|_{\sigma,\sup}$. On rappelle que la métrique $\|\cdot\|_\sigma$ vérifie les inégalités

$$\|s\|_\sigma \le \|s\|_{\sigma,\sup} \le \sqrt{\operatorname{rg}(\pi_*\mathscr{L})}\|s\|_\sigma. \tag{57}$$

Par définition,

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))/n. \tag{58}$$

Lemme 4.2.1. — *Si $\overline{\mathscr{L}}_1$ et $\overline{\mathscr{L}}_2$ sont deux fibrés inversibles hermitiens tels que $\mathscr{L}_{1,K}$ et $\mathscr{L}_{2,K}$ soient amples, alors*

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)) \ge \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1)) + \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2)) - \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}]\\ - \log(\operatorname{rg}\pi_*\mathscr{L}_1) - \log(\operatorname{rg}\pi_*\mathscr{L}_2) - \frac{\log|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}.\end{aligned} \tag{59}$$

Démonstration. — Soient $L_1 = \mathscr{L}_{1,K}$ et $L_2 = \mathscr{L}_{2,K}$. On note $E_1 = H^0(X, L_1)$, $E_2 = H^0(X, L_2)$ et $E = H^0(X, L_1\otimes L_2)$. D'après (56), on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)) \ge \frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}] - \log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)).$$

Par définition

$$-\log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)) = -\frac{1}{2}\inf_{0\neq s\in E}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_\sigma^2 \ge -\frac{1}{2}\inf_{\substack{0\neq s_1\in E_1\\ 0\neq s_2\in E_2}}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_1\cdot s_2\|_\sigma^2.$$

En utilisant la première inégalité de (57), on obtient

$$\begin{aligned}-\log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)) &\ge -\frac{1}{2}\inf_{\substack{0\neq s_1\in E_1\\ 0\neq s_2\in E_2}}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_1\cdot s_2\|_{\sigma,\sup}^2\\
&\ge -\frac{1}{2}\inf_{\substack{0\neq s_1\in E_1\\ 0\neq s_2\in E_2}}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_1\|_{\sigma,\sup}^2\cdot\|s_2\|_{\sigma,\sup}^2\\
&\ge -\frac{1}{2}\inf_{\substack{0\neq s_1\in E_1\\ 0\neq s_2\in E_2}}\Big(\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_1\|_{\sigma,\sup}^2 + \log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_2\|_{\sigma,\sup}^2\Big)\end{aligned}$$

D'après la seconde inégalité de (57),

$$\begin{aligned}-\log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1\otimes\overline{\mathscr{L}}_2)) &\ge -\frac{1}{2}\inf_{0\neq s_1\in E_1}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_1\|_\sigma^2 - \frac{1}{2}\inf_{0\neq s_2\in E_1}\log\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_2\|_\sigma^2\\
&\quad - \frac{1}{2}\big(\log(\operatorname{rg}E_1) + \log(\operatorname{rg}E_2)\big)\\
&= -\log\varepsilon(\pi_*\overline{\mathscr{L}}_1) - \log\varepsilon(\pi_*\overline{\mathscr{L}_2}) - \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}E_1) - \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}E_2).\end{aligned}$$

On en déduit (59) en s'appuyant sur (55). □

Proposition 4.2.2. — *Avec les notations du lemme 4.2.1, on a*

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_2) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}_1) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}_2). \tag{60}$$

Démonstration. — D'après le lemme 4.2.1, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{split}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) \geq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n})) + \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) - \log[K:\mathbb{Q}] \\ - \log(\operatorname{rg}\pi_*\mathscr{L}_1^{\otimes n}) - \log(\operatorname{rg}\pi_*\mathscr{L}_2^{\otimes n}) - \frac{\log|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}\end{split} \tag{61}$$

Si on divise les deux côtés de (61) par n et passe n tendre vers l'infini, par passage à la limite on obtient (60). □

Proposition 4.2.3. — *Soient $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ sont amples, et $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Alors*

1) Pour tout entier $n \geq 1$, $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) = n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$,
2) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{M}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$.

Démonstration. — 1) résulte de la définition de $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\cdot)$, voir (58).

2) En effet, on a $\pi_*((\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M}))^{\otimes n}) = \pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \otimes \overline{M}^{\otimes n}$. Par conséquent,

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M}))^{\otimes n}) = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) + n\widehat{\deg}(\overline{M}).$$

Par passage à la limite on obtient $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{M}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$. □

4.2.2. Pente maximale asymptotique d'un fibré inversible hermitien quelconque. — La sur-additivité de $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}$ obtenue dans le sous-paragraphe précédent permet d'étendre le domaine de définition de la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ à l'espace de tous les fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$. Dans le reste de la section, le symbole Θ désigne l'espace des fibrés inversibles hermitiens $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ tels que $\mathscr{L}_K$ soit ample.

Définition 4.2.4. — Soient $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathscr{L}}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$. On suppose que $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$. Il existe alors un entier $n_0(\mathcal{L}, \mathscr{L}) > 0$ tel que $\mathcal{L}_K \otimes \mathscr{L}_K^{\otimes n}$ soit ample quel que soit $n \geq n_0(\mathcal{L}, \mathscr{L})$. On définit pour tout entier $n \geq n_0(\mathcal{L}, \mathscr{L})$,

$$A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}).$$

Lemme 4.2.5. — *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules localement libres de rang fini. Alors tout homomorphisme $f : \mathscr{E}_K \to \mathscr{F}_K$ se prolonge en un homomorphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$. Si de plus f est injectif, le prolongement peut être choisi injectif.*

Démonstration. — Soit $\eta : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ le point générique. C'est un morphisme plat. Soit $X := \mathscr{X}_K$. On désigne par $p : X \to \operatorname{Spec} K$ et $q : X \to \mathscr{X}$ les morphismes canoniques, qui s'insèrent dans un carré cartésien:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathscr{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\eta"'] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K. \end{tikzcd}$$

D'après [**23**] III, 1.4.15, pour tout $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{G}$, l'homomorphisme canonique $\eta^*\pi_*\mathscr{G} \to p_*q^*\mathscr{G}$ est un isomorphisme. Par conséquent, on a un isomorphisme canonique $H^0(\mathscr{X},\mathscr{G}_K) \cong H^0(\mathscr{X},\mathscr{G})_K$. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules localement libres de rang fini, alors $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ s'identifie à l'espace des sections de $\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{X}$. D'autre part,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}_K,\mathscr{F}_K) \cong H^0(X,\mathscr{E}_K^\vee \otimes \mathscr{F}_K) = H^0(\mathscr{X},\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})_K.$$

Par conséquent, pour tout homomorphisme $f : \mathscr{E}_K \to \mathscr{F}_K$, il existe un élément non-nul $a \in \mathcal{O}_K$ tel que f se prolonge en un homomorphisme de $\mathscr{E}_a \to \mathscr{F}_a$, autrement dit, l'image de l'homomorphisme composé

$$\mathscr{E} \xrightarrow{a} \mathscr{E} \longrightarrow q_*\mathscr{E}_K \longrightarrow q_*\mathscr{F}_K$$

est dans $\mathscr{F}$. On obtient ainsi un homomorphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$. Cet homomorphisme est injectif lorsque f est injectif. □

Proposition 4.2.6. — *Avec les notations de la définition 4.2.4,*

1) pour tout $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$, la suite $(A_n(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}}))_{n\geq n_0(\mathcal{L},\mathscr{L})}$ est croissante et converge vers une limite dans $\mathbb{R}$;

2) si $\overline{M}$ est un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*, $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$, alors*

$$A_n(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*\overline{M}) = A_n(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}})$$

quel que soit $n \geq n_0(\mathcal{L},\mathscr{L})$;

3) si $\mathcal{L}_K$ est ample, alors

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) = \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta} \lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}});$$

4) pour tout fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*,*

$$\widehat{\deg}(M) = \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta} \lim_{n\to+\infty} A_n(\pi^*(\overline{M}),\overline{\mathscr{L}}).$$

Démonstration. — 1) D'après la proposition 4.2.2, pour tout entier $n \geq n_0(\mathcal{L},\mathscr{L})$,

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(n+1)}) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}).$$

Donc $A_{n+1}(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}}) \geq A_n(\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathscr{L}})$.

Comme $\mathscr{L}_K$ est ample, il existe un entier $m \geq 1$ et un homomorphisme injectif de $\mathcal{L}_K$ vers $\mathscr{L}_K^{\otimes m}$ qui induit un homomorphisme injectif $\varphi : \mathcal{L} \to \mathscr{L}^{\otimes m}$ (cf. le lemme 4.2.5 *infra*). Pour tout $n \geq n_0(\mathcal{L},\mathscr{L})$, l'homomorphisme φ induit un homomorphisme injectif $\varphi_n : \mathcal{L}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n} \to \mathscr{L}^{\otimes(m+n)}$. Soit $\psi_n : H^0(X,\mathcal{L}_K\otimes\mathscr{L}_K^{\otimes n}) \to H^0(X,\mathscr{L}_K^{\otimes(m+n)})$

l'homomorphisme injectif des espaces de sections globales correspondant. D'après l'inégalité de pentes (22), pour tout entier $u \geq 1$, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes u} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes un})) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes u(n+m)})) + h(\psi_n^{\otimes u}).$$

Comme $\psi_n^{\otimes u}$ provient d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules, $\|\psi_n^{\otimes u}\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ quel que soit $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$. Si $\sigma : K \to \mathbb{C}$ est un plongement, alors

$$\|\psi_n^{\otimes u}\|_\sigma \leq \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{n,K}^{\otimes u}(x)\|_\sigma = \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{n,K}(x)\|_\sigma^u = \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_K(x)\|_\sigma^u.$$

Par conséquent,

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes u} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes un})) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes u(n+m)})) + \frac{u}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \log \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Par passage à la limite, on obtient que

$$\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \leq \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes(m+n)}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \log \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Autrement dit,

$$A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}) \leq m\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \log \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Par conséquent, la suite $(A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}))_{n \geq n_0(\mathcal{L},\mathscr{L})}$ est bornée supérieurement, donc converge dans $\mathbb{R}$.

2) En effet, pour tout $n \geq n_0(\mathcal{L}, \mathscr{L})$,

$$A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M})) = \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n} \otimes \pi^*(\overline{M}^{\otimes n})) - n\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M})) = A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}).$$

3) D'après 1), $A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}) = \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}})$, donc $\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) \geq \inf_{\overline{\mathscr{L}} \in \Theta} \lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}})$. D'autre part, pour tout $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$,

$$A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}) \geq \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) + \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}}).$$

4) En effet, pour tout $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$,

$$A_n(\pi^*(\overline{M}), \overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}^\pi_{\max}(\pi^*(\overline{M}) \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\deg}(\overline{M}).$$

□

Définition 4.2.7. — Avec les notations de la proposition 4.2.6, on appelle *pente maximale asymptotique arithmétique* de $\overline{\mathcal{L}}$ relativement à π la valeur

$$\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) := \inf_{\overline{\mathscr{L}} \in \Theta} \lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}).$$

La proposition 4.2.6 3) montre que cette fonction généralise la fonction de la pente maximale asymptotique, initialement définie sur Θ.

Lemme 4.2.8. — *Soient* $\overline{\mathscr{L}}_1$ *et* $\overline{\mathscr{L}}_2$ *deux fibrés inversibles hermitiens dans* Θ. *Si* $f : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ *est un homomorphisme non-nul, on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n})) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\sup_{x\in\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})}\log\|f_K(x)\|_\sigma. \tag{62}$$

Démonstration. — Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi_n : H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_{1,K}^{\otimes n}) \to H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_{2,K}^{\otimes n})$ l'homomorphisme induit par $f^{\otimes n}$. D'après l'inégalité de pentes, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n})) &\leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\log\|\varphi_n\|_\sigma\\ &\leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} n \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})}\log\|f_K(x)\|_\sigma.\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient (62). □

La proposition suivante montre que la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}$ prolongée préserve les propriété de la fonction initiale, comme par exemeple la sur-additivité.

Proposition 4.2.9. — *Soient* $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{L}}_1$ *et* $\overline{\mathcal{L}}_2$ *trois fibrés inversibles hermitiens sur* $\mathscr{X}$, $\overline{M}$ *un fibré inversible hermitien sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *On a*

1) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}_1\otimes\overline{\mathcal{L}}_2) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}_1) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}_2)$;
2) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}) = n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}})$ *pour tout entier* $n \geq 1$;
3) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}\otimes\pi^*(\overline{M})) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) + \widehat{\deg}(\overline{M})$;
4) si $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *est un homomorphisme non-nul, on a*

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}_1) \leq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}_2) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})}\log\|f_K(x)\|_\sigma.$$

Démonstration. — Pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit ample, et tout entier m suffisamment grand, on a, d'après la proposition 4.2.6 et le lemme 4.2.8, que

$$\begin{gathered}A_{2m}(\overline{\mathcal{L}}_1\otimes\overline{\mathcal{L}}_2, \overline{\mathscr{L}}) \geq A_m(\overline{\mathcal{L}}_1, \overline{\mathscr{L}}) + A_m(\overline{\mathcal{L}}_2, \overline{\mathscr{L}}),\\ A_{mn}(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}, \overline{\mathscr{L}}) = nA_m(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}),\\ A_m(\overline{\mathcal{L}}\otimes\pi^*(\overline{M}), \overline{\mathscr{L}}) = A_m(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathscr{L}}) + \widehat{\deg}(\overline{M}),\\ A_m(\overline{\mathcal{L}}_1, \overline{\mathscr{L}}) \leq A_m(\overline{\mathcal{L}}_2, \overline{\mathscr{L}}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})}\log\|f_K(x)\|_\sigma.\end{gathered}$$

Par passage à la limite, on obtient les (in)égalités annoncées. □

4.2.3. Pente maximale asymptotique d'un fibré vectoriel hermitien. — La notion de pente maximale asymptotique peut s'étendre naturellement pour tout les fibrés vectoriels hermitien sur $\mathscr{X}$ par passage aux faisceau canonique du fibré projectif, muni des métriques de Fubini-Study.

Définition 4.2.10. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On appelle *pente maximale asymptotique arithmétique* relativement à π de $\overline{E}$ la valeur

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) := \widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{\mathcal{O}_E(1)}),$$

où $p : \mathbb{P}(E) \to \mathscr{X}$ est le morphisme canonique et où les métriques sur $\mathcal{O}_E(1)$ sont des métriques de Fubini-Study.

Proposition 4.2.11. — *Avec les notations de la définition 4.2.10, si E_K est ample, alors*

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^n\overline{E})).$$

Démonstration. — Soit r le rang de E. Par définition

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}((\pi p)_*(\overline{\mathcal{O}_E(1)})).$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$, on désigne par $\|\cdot\|_{\sigma,L^2}$ la métrique L^2 sur $S^nE_{\sigma,\mathbb{C}}$ par rapport à la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_E(1)_{\sigma,\mathbb{C}}$, et par $\|\cdot\|_\sigma$ la métrique produit symétrique sur $S^nE_{\sigma,\mathbb{C}}$. D'après [**7**] Lemma 4.3.6, on a la relation

$$\|s\|^2_\sigma = \binom{n+r-1}{n}\|s\|^2_{\sigma,L^2}$$

pour tout $x \in X_\sigma(\mathbb{C})$ et tout $s \in x^*(S^nE)$. Par conséquent, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^nE,(\|\cdot\|_\sigma))) = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^nE,(\|\cdot\|_{\sigma,L^2}))) - \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]}\log\binom{n+r-1}{n}.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^n\overline{E})).$$

□

4.2.4. Lien avec une condition d'annulation.

— La négativité de la pente maximale asymptotique d'un fibré inversible hermitien est liée à l'absence de section globale effective de certains fibrés vectoriels hermitiens.

Proposition 4.2.12. — *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$.*
1) Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) > 0$, alors $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^\vee) < 0$.
2) Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) < 0$, alors $\mathcal{L}$ n'a pas de section effective;
3) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) \leq 0$, alors $\mathcal{L}$ n'a pas de section strictement effective;
4) si $\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample, alors $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) > 0$.

Démonstration. — 1) Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}) = 0$, d'après la proposition 4.2.9 1), on a $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^\vee) \leq 0$. Donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) > 0$ implique $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^\vee) < 0$.

2) D'après la remarque 4.1.10, $\mathcal{L}$ a une section effective si et seulement s'il existe un homomorphisme non-nul $f : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathcal{L}$ tel que $\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|f_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma \leq 1$. D'après

la proposition 4.2.9 4), si $\mathcal{L}$ admet une section effetive, alors $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}) = 0$.

3) est similaire à 2).

4) Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M}) > 0$. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample, il existe $n \geq 1$ tel que $\pi^*(M^\vee) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ ait une section effective. Cela implique que

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\pi^*(\overline{M}^\vee) \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}) = n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) - \widehat{\deg}(M) \geq 0.$$

Donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}) > 0$. □

Lemme 4.2.13. — *Soient $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$ et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien quelconque sur $\mathscr{X}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\varphi : \mathcal{L} \to \mathscr{L}^{\otimes n}$ tel que $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon$.*

Démonstration. — On démontre d'abord le cas où $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}$. Comme $\mathscr{L}$ est arithmétiquement ample, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mathscr{L}^{\otimes m}$ ait une section strictement effective. Soit $\psi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes m}$ l'homomorphisme correspondant à la section. D'après la remarque 4.1.10, $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\psi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$. Par conséquent, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\psi^{\otimes p}_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon$. Autrement dit, $\varphi = \psi^{\otimes p} : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes mp}$ vérifie la condition dans l'assertion du lemme. Pour le cas général, comme $\mathscr{L}$ est ample, il existe un entier $q \geq 1$ et un homomorphisme injectif η de $\mathcal{L}$ vers $\mathscr{L}^{\otimes q}$. Soit $\displaystyle\alpha = \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\eta_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma$. Soient $\phi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes r}$ un homomorphisme injectif tel que $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon/\alpha$ et $\varphi = \eta \otimes \phi$. On a pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, $\displaystyle\sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma \leq \Big(\sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\eta_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma\Big)\Big(\sup_{y\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(y)\|_\sigma\Big) < \varepsilon$. □

Lemme 4.2.14. — *Soient $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe deux entiers $m, n \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\varphi : \mathcal{E} \to (\mathscr{L}^{\otimes n})^{\oplus m}$ tel que $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon$.*

Démonstration. — Comme $\overline{\mathscr{L}}$ est arithmétiquement ample, le fibré inversible $\mathscr{L}$ est ample, donc il existe deux entiers $p, m \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\psi : \mathcal{E} \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus m}$ (cf. proposition 1.4.2 *infra*). Soient $\displaystyle\alpha = \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\psi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma$ et $\eta : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ un homomorphisme injectif tels que $\displaystyle\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\eta_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon/\alpha$, et que $\varphi = \psi \otimes \eta : E \to (\mathscr{L}^{\otimes(p+q)})^{\oplus m}$. On a, pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$, $\sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < \varepsilon$. □

Remarque 4.2.15. — Si on combine le lemme 4.2.14 et le lemme 4.1.13, on obtient que, pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathscr{X}$ et tout fibré vectoriel $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe une constante C telle que, pour tout entier $D \geq 1$, on ait $\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{E}} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D})) \leq CD$. C'est une généralisation de la proposition 4.1.13.

Définition 4.2.16. — Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{\mathcal{E}}$ est *faiblement positif* si, pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D})) > 1$, où ε est la fonction définie dans (54).

Dans la suite, on présente quelques formes équivalentes de la condition de positivité faible.

Proposition 4.2.17. — *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ et tout fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} \otimes \overline{\mathcal{F}})) > 1;$$

2) $\overline{\mathcal{E}}$ est faiblement positif;

3) il existe un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$, un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > 1.$$

Démonstration. — "1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)" sont triviaux.

"3)$\Longrightarrow$1)": D'après les lemmes 4.2.13 et 4.2.14, il existe trois entiers $p, q, r \geq 1$ ainsi que deux homomorphismes injectifs $\varphi : \mathcal{F} \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus r}$ et $\psi : \mathcal{L} \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ tels que $\max_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$ et $\max_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\psi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma. < 1$. Pour tout entier $D \geq 1$, l'homomorphisme injectif $\phi_D = \psi^{\otimes D} \otimes \varphi$ de $\mathcal{L}^{\otimes D} \otimes \mathcal{F}$ vers $(\mathscr{L}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}$ est tel que $\max_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$. D'après 3) il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})) > 1$. Par conséquent, on a $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}) > 1$. Comme $\max_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$, on obtient $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{E}}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} \otimes \overline{\mathcal{F}})) > 1$. □

Dans le théorème qui suit est présenté un critère de la condition de positivité faible par la négativité de la pente maximale asymptotique du dual du fibré inversible hermitien. Lorsque la fibre générique du fibré est négative, c'est-à-dire que la positivité verticale est exclue, alors ces deux conditions sont équivalentes.

Théorème 4.2.18. — *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible hermitien. Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\vee}) < 0$, alors $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif. La réciproque est vraie lorsque $\mathcal{L}_K^{\vee}$ est ample.*

Démonstration. — "Nécessité": Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\vee}) < 0$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ qui est arithmétiquement ample tels que $A_m(\overline{\mathcal{L}}^{\vee}, \overline{\mathscr{L}}) \le -\varepsilon$ pour tout entier m suffisamment grand. En remplacant $\overline{\mathscr{L}}$ par une puissance convenable on peut supposer que $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}}) \le \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) - \varepsilon$. Soit $\lambda > \varepsilon^{-1}\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ une constante. Pour tout entier $D \ge 1$ et tout entier $n > \lambda D$, on a, d'après la proposition 4.2.9,

$$(n-D)\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) \le \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}((\overline{\mathcal{L}}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}})^{\otimes n}) \le n(\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) - \varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) \le D\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) - n\varepsilon < 0.$$

Donc $\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}$ n'a pas de section effective.

"Suffisance": Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M}) > 0$. Il existe une constante $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n}) \otimes \pi^*(\overline{M}^{\otimes D})) > 1$, et donc

$$\begin{aligned} &\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes \pi^*(\overline{M}^{\otimes D}))) = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n})) + D\widehat{\deg}(\overline{M}) \\ &\le \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(\mathcal{L}^{\vee\otimes n}))) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}. \end{aligned} \tag{63}$$

Soit $(D_n)_{n\ge1}$ une suite telle que

i) $D_n > \lambda$ pour tout entier $n \ge 1$;
ii) $D_n < n/\lambda$ pour n suffisamment grand;
iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{D_n} = \lambda$.

D'après (63), pour tout entier $n \ge 1$,

$$\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n})) + \frac{D_n}{n}\widehat{\deg}(\overline{M}) \le \frac{1}{2n}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(\mathcal{L}^{\vee\otimes n}))) + \frac{\log|\Delta_K|}{2n[K:\mathbb{Q}]}.$$

Par passage à la limite on obtient $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^{\vee}) \le -\lambda^{-1}\widehat{\deg}(\overline{M}) < 0$. □

La condition de positivité faible implique (est donc équivalente à) une condition de coissance exponentielle de la norme du plus petit vecteur.

Proposition 4.2.19. — *Soient $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathscr{L}}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$. Si $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif, alors il existe deux nombres réels $a, \lambda' > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda'$ et tout entier $n > \lambda' D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \ge e^{an}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.2.13, il suffit de démontrer la proposition pour le cas où $\overline{\mathscr{L}}$ et $\overline{\mathcal{L}}\otimes\overline{\mathscr{L}}$ admettent au moins une section effective. Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M})>0$. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif, il existe $\lambda>0$ tel que, pour tout entier $D>\lambda$ et tout entier $n>\lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes D}))>1.$$

On fixe maitenant deux entiers $D_0>\lambda$ et $n_0>\lambda D_0$. Pour tout entier $n>0$ on observe que

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes nD_0}))>1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\\&=\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes nD_0}))-nD_0\widehat{\deg}(\overline{M})\\&\le -nD_0\widehat{\deg}(\overline{M})+\frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0})))+\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))&=-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\\&\le -D_0\widehat{\deg}(\overline{M}).\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un nombre réel $a>0$ et un entier $n_1\ge 1$ tels que

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\ge e^{an}$$

pour tout entier $n\ge n_1$. Comme $\overline{\mathscr{L}}$ a une section effective, et comme il existe un homomorphisme ϕ de $\overline{\mathcal{L}}^{\vee}$ vers $\overline{\mathscr{L}}$ tel que $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})}\|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma\le 1$, on obtient

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes(nn_0+l)}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))\ge e^{an}$$

pour tout entier $D_0\le D\le nD_0$ et tout entier $0\le l\le nD_0-D$. On note

$$\lambda_0=\max\Big(n_0,\frac{n_0n_1}{D_0},\frac{n_0^2}{D_0^2}+\frac{n_0}{D_0}\Big)$$

Pour tout entier $D\ge D_0$ et tout entier $m\ge\lambda_0 D$, on a $\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes m}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))\ge e^{am/(n_0+1)}$ puisque dans ce cas-là, il existe deux entiers $n\ge n_1$ et $0\le l<n_0\le nD_0-D$ tels que $m=nn_0+l$. □

La proposition 4.2.19 suggère la généralisation suivante de la condition de positivité faible pour un fibré vectoriel hermitien.

Définition 4.2.20. — Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{\mathcal{E}}$ est *faiblement positif* si, pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe deux nombres réels $a,\lambda>0$ tels que, pour tout entier $D>\lambda$ et tout entier $n\ge\lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^{\vee}\otimes\overline{\mathcal{L}}^{\otimes D}))>e^{an}$.

Remarque 4.2.21. — On peut proposer une autre condition en faisant une généralisation naïve de la définition 4.2.16 au cas de fibré vectoriel hermitien. Certainement cette condition est plus faible que celle dans la définition 4.2.20. Mais il n'est pas claire, au moins pour l'auteur, que l'analogue de la proposition 4.2.19 est encore valable pour le cas de rang > 1.

La proposition suivante est un analogue au cas de rang supérieure de la proposition 4.2.17.

Proposition 4.2.22. — *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ et tout fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\mathscr{X}$ il existe deux nombres réels $a, \lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on ait*
$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} \otimes \overline{\mathcal{F}})) > e^{an};$$
2) *$\overline{\mathcal{E}}$ est faiblement positif;*
3) *il existe un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$, deux nombres $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on ait*
$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > e^{an}.$$

Démonstration. — "1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)" sont triviaux.

"3)$\Longrightarrow$1)": D'après les lemmes 4.2.13 et 4.2.14, il existe trois entiers $p, q, r \geq 1$ ainsi que deux homomorphismes injectifs $\varphi : \mathcal{F} \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus r}$ et $\psi : \mathcal{L} \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ tels que $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\varphi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$ et $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\psi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$. Pour tout entier $D \geq 1$, l'homomorphisme $\phi_D = \psi^{\otimes D}\otimes\varphi$ de $\mathcal{L}^{\otimes D}\otimes F$ vers $(\mathscr{L}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}$ est injectif, et $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{D,\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$. D'après 3) il existe $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})) > e^{an}$. Par conséquent, on a $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}) > e^{an}$. Comme $\max\limits_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \sup\limits_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} \|\phi_{\sigma,\mathbb{C}}(x)\|_\sigma < 1$, on obtient $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} \otimes \overline{\mathcal{F}})) > e^{an}$. □

Lemme 4.2.23. — *Soit $p : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un schéma projectif et plat sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{Y}_K$ soit lisse sur* $\operatorname{Spec} K$ *et équidimensionnel de dimension d. Soit de plus $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{Y}$ tel que $\mathcal{L}$ soit ample relativement à p et tel que, pour chaque point $y \in \mathscr{X}(\mathbb{C})$, $c_1(\overline{\mathcal{L}}|_{p^{-1}(y)})$ soit strictement positive. Alors il existe un fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\overline{\mathcal{L}} \otimes p^*(\overline{M})$ soit arithmétiquement ample.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{X}$ est projectif sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, il existe un fibré inversible hermitien $\overline{M}_1$ tel que M_1 soit ample et tel que $c_1(\overline{M}_1)$ soit strictement positive. Après avoir tordu $\overline{\mathcal{L}}$ par une puissance tensorielle de $p^*\overline{M}_1$ on peut supposer que $\overline{\mathcal{L}}$ soit ample et que $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ soit strictement positive. Comme $\mathcal{L}$ est ample, il existe une puissance $\mathcal{L}^{\otimes n}$ de $\mathcal{L}$ qui est engendrée par ses sections au-dessus de $\mathscr{Y}$. Plus précisément, il existe m sections $(s_i)_{1\le i\le m}$ de $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ sur $\mathscr{Y}$ tel que l'homomorphisme $(s_i)_{1\le i\le m} : \mathcal{O}_{\mathscr{Y}}^{\oplus m} \longrightarrow L^{\otimes n}$ soit surjectif. On désigne par h la famille des métriques hermitiennes sur $\mathcal{L}^{\otimes n}$ qui proviennent par produit tensoriel de celles de $\overline{\mathcal{L}}$. Si $a > 0$ est un nombre réel, on désigne par h_a la famille des métriques hermitiennes sur $\mathcal{L}^{\otimes n}$ qui proviennent de celles de $\overline{\mathcal{L}} \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}, (\|\cdot\|_{\sigma,a})_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$, où $\|1_x\|_{\sigma,a} = a$ quels que soient $x \in \mathscr{X}(\mathbb{C})$ et $\sigma : K \to \mathbb{C}$. On a la relation $\|s(x)\|_{\sigma,a} = a^n\|s(x)\|_\sigma$ quelle que soit la section s de $\mathcal{L}^{\otimes n}$. Quitte à choisir un a assez petit, on peut supposer les sections s_i strictement effective. Cela montre que le fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{L}}\otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}, (\|\cdot\|_{\sigma,a}))$ est arithmétiquement ample compte tenu de la remarque 4.1.12. □

Remarque 4.2.24. — Le lemme 4.2.23 montre en particulier que il existe au moins un fibré inversible arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$. En effet, comme le morphisme $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est projectif, il existe un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $\mathscr{X}$. Par conséquent, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}_{\sigma,\mathbb{C}}$ est un faisceau inversible ample sur $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$. En remplaçant $\mathcal{L}$ par l'une de ses puissances tensorielles on peut supposer que $\mathcal{L}$ soit très ample. On choisit un produit hermitien quelconque sur $V_\sigma = H^0(\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C}), \mathcal{L}_{\sigma,\mathbb{C}})$. L'image réciproque de la métrique de Fubini-Study par le plongement canonique de $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}(V_\sigma)$ donne une métrique hermitienne strictement positive sur $\mathcal{L}_{\sigma,\mathbb{C}}$. Enfin, si on applique le lemme 4.2.23 au morphisme $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on obtient l'existence d'un fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\pi^*\overline{M} \otimes \overline{\mathcal{L}}$ soit arithmétiquement ample.

La proposition suivante montre que la condition de positivité faible d'un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ est équivalente à la même condition du dual du fibré canonique de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ muni des métriques de Fubini-Study. Ce résultat nous permet de ramener l'étude de cette condition au cas de fibré inversible hermitien.

Proposition 4.2.25. — *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On désigne par $\overline{\mathcal{L}}$ le fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\vee}(-1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$, muni de les métriques duales des métriques de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\vee}(1)$. Alors $\overline{\mathcal{E}}$ est faiblement positif sur $\mathscr{X}$ si et seulement si $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$.*

Démonstration. — Soient $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee) \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique et r le rang de $\mathcal{E}$.

"$\Longleftarrow$": On suppose que $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible hermitien. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif, il existe deux nombres $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D}) > e^{an}.$$

Par conséquent

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{M}^{\otimes D})) = \binom{n+r-1}{n}^{\frac{1}{2}} \varepsilon((\pi p)_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D}) > e^{an}.$$

"$\Longrightarrow$": Le faisceau $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\vee}(1)$ est ample relativement à p. De plus, les métriques de Fubini-Study sur $\mathcal{L}^\vee$ sont strictement positives sur les fibres. Par conséquent, il existe un fibré vectoriel hermitien $\overline{M}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\overline{\mathscr{L}} := \overline{\mathcal{L}}^\vee \otimes p^*(\overline{M})$ soit arithmétiquement ample (cf. lemme 4.2.23 *infra*).

Comme $\overline{E}$ est faiblement positif, il existe deux nombre réels $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \overline{M}^{\otimes D})) > e^{an}.$$

Autrement dit,

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D})) = \varepsilon((\pi p)_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes(n-D)} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > e^{an}\binom{n+r-1}{n}^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, on ait

$$e^{an}\binom{n+r-1}{n}^{-\frac{1}{2}} > 1.$$

Soit $\lambda' = \max(n_0, \lambda)$, alors pour tout entier $D > \lambda'$ et $n > \lambda' D$ on a

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{\mathcal{L}}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > 1.$$

Donc $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif. □

Le théorème suivant donne un critère numérique de la condition de positivité faible, qui généralise le théorème 4.2.18 au cas de rang supérieur.

Théorème 4.2.26. — *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) < 0$, alors $\overline{\mathcal{E}}$ est faiblement positif. La réciproque est vraie lorsque $\mathcal{E}_K^\vee$ est ample.*

Démonstration. — Soient $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee) \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique et $\overline{\mathcal{L}}$ le fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\vee}(-1)$ muni des métriques duales à celles de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\vee}(1)$.

"$\Longrightarrow$": Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) = \widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^\vee) < 0$, le fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ est faiblement positif, donc il en est de même de $\overline{\mathcal{E}}$.

"$\Longleftarrow$": Si $\overline{\mathcal{E}}$ est faiblement positif, il en est de même de $\overline{\mathcal{L}}$. D'autre part, si $\mathcal{E}_K^\vee$ est ample, alors $\mathcal{L}_K^\vee$ est aussi ample. D'après le théorème 4.2.18, on obtient $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) = \widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{\mathcal{L}}^\vee) < 0$. □

4.3. Polygone et pentes asymptotiques en géométrie relative

Dans cette section, on applique les résultats obtenus dans le chapitre 3 à l'étude du comportement asymptotique des fibrés vectoriels dans le cadere de la géométrique relative. Bien que certaines assertions dans cette section peut être généralisées au cas adélique, on préfère de travailler dans le cadre des fibrés vectoriels usuels pour clarifier les idées géométriques.

On fixe un corps k et une courbe projective et lisse C sur $\operatorname{Spec} k$. Soit g le genre de C. Pour tout fibré vectoriel E sur C, le théorème de Riemann-Roch implique que

$$\chi(E) = \operatorname{rg} H^0(C,E) - \operatorname{rg} H^1(C,E) = \deg(E) - \operatorname{rg}(E)(1-g). \tag{64}$$

4.3.1. Polygone et pentes asymptotiques. — Soit $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ une $\mathcal{O}_C$-algèbre de type fini. On suppose $B_n \neq 0$ pour n suffisamment grand et que B_K est un anneau intègre. Dans ce sous-paragraphe, on montre que la suite de polygones $(\mathcal{P}_{B_n}/n)_{n\geq 1}$ converge uniformément. C'est un analogue dans le cadre de la géométrie relative du théorème 4.1.14. On rappelle d'abord une estimation de la pente mimiale de produit tensoriel établie dans [**14**].

Soit $b(C) = \min\{\deg(H) \mid H \in \operatorname{Pic}(C),\ H \text{ est ample}\}$. C'est un entier strictement positif, et l'ensemble des valeurs de $\deg(H)$ lorsque H décrit $\operatorname{Pic}(C)$ est exactement $b(C)\mathbb{Z}$. Soit en outre $a(C) = b(C) + g - 1$.

Lemme 4.3.1. — *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur C. On a $\mu_{\min}(E \otimes F) \geq \mu_{\min}(E) + \mu_{\min}(F) - a(C)$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer [**14**] Proposition 2.2 aux fibrés vectoriels $E^\vee$ et $F^\vee$. En utlisant le fait que $\mu_{\max}(E^\vee) = -\mu_{\min}(E)$, on obtient le résultat. □

Théorème 4.3.2. — *S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mu_{\max}(B_n) \leq \alpha n$ quel que soit $n \geq 1$, alors*

1) *la suite des polygones $(\mathcal{P}_{B_n}/n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction concave sur $[0,1]$, où les polygones $\mathcal{P}_{B_n}$ sont définis dans §2.3.2;*
2) *la suite de pentes maximales $(\mu_{\max}(B_n)/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$;*
3) *si de plus tout homomorphisme $B_{n,K} \otimes B_{m,K} \to B_{n+m,K}$ induit par la structure d'algèbre de B est surjectif pour n et m assez grands, la suite des pentes minimales $(\mu_{\min}(B_n)/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — D'après un arguement similaire à celui dans la démonstration du théorème 4.1.1, en utilisant le lemme 4.3.1, on obtient que l'algèbre graduée $B_K = \bigoplus_{n\geq 0} B_{n,K}$, munie des filtrations de Harder-Narasimhan, est f-pseudo-filtrée pour la fonction constante $f \equiv \frac{1}{2}a(C)$. Le théorème résulte donc du théorème 3.4.6 et les propositions 3.2.9 et 3.2.10. □

4.3.2. Théorème de Hilbert-Samuel. — Soit $\pi : X \to C$ un k-morphisme projectif et surjectif de dimension relative d et soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible qui est ample relativement à π. On établit l'analogue du théorème 4.1.14 en géométrie relative. L'idée est d'appliquer le théorème 4.3.2 à l'algèbre des images directs $B = \bigoplus_{n\geq 0} \pi_*(L^{\otimes n})$. On commence par un résultat (proposition 4.3.4) sur la compraison de la pente maximale au plus grand degré de sous-fibré inversible, qui est analogue à la proposition 4.1.8.

Lemme 4.3.3 **([14] Lemma 2.1)**. — *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul. Si $H^0(C,E)$ est nul, alors $\mu_{\max}(E)\leq g-1$.*

Proposition 4.3.4. — *Pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul E, il existe un sous-$\mathcal{O}_C$-module inversible $\mathcal{L}$ tel que $\deg(\mathcal{L})\geq\mu_{\max}(E)-a(C)$, où $a(C)$ est la constante définie dans §4.3.1.*

Démonstration. — Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible de degré $b(C)$. On choisit $r\in\mathbb{Z}$ tel que

$$g+b(C)-1\geq\mu_{\max}(E\otimes M^{\otimes r})=\mu_{\max}(E)+rb(C)>g-1.$$

D'après le lemme 4.3.3 on obtient $H^0(C,E\otimes M^{\otimes r})\neq 0$. Donc il existe un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_C$ vers $E\otimes M^{\otimes r}$. Soit $\mathcal{L}=M^{\vee\otimes r}$. Il existe alors un homomorphisme injectif de $\mathcal{L}$ vers E. En outre, on a

$$\deg(\mathcal{L})=-r\deg(M)=-rb(C)\geq\mu_{\max}(E)-g-b(C)+1.$$

Comme $a(C)=b(C)+g-1$, on obtient $\deg(L)\geq\mu_{\max}(E)-a(C)$. □

La proposition au-dessus est une estimation sur la croissance des pentes maximales. Elle montre en particulier que l'algèbre $B=\bigoplus_{n\geq 0}\pi_*(L^{\otimes n})$ vérifie la condition du théorème 4.3.2.

Proposition 4.3.5. — *Pour tout $\mathcal{O}_X$-module sans torsion $\mathcal{F}$, il existe une constante $\alpha(\mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout entier $n>1$, on ait $\mu_{\max}(\pi_*(\mathcal{F}\otimes L^{\otimes n}))\leq\alpha(\mathcal{F})n$.*

Démonstration. — La variété X étant projective sur k, on choisit un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathscr{L}$ sur X. En plongeant $\mathcal{F}$ dans une somme directe de faisceaux inversibles (cf. la proposition 1.4.2 *infra*), on voit qu'il suffit d'établir la proposition lorsque $\mathcal{F}$ est lui-même inversible, ce que l'on supposera désormais.

L'égalité $\pi_*(c_1(\mathscr{L})^d)=c_1(L_{K'})^d[C]$ est vérifiée dans le groupe de Chow $\mathrm{CH}_1(C)$. Soient M un sous-$\mathcal{O}_C$-module inversible de $\pi_*(\mathcal{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ et $\varphi:M\rightarrow\pi_*(\mathcal{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ l'homomorphism canonique. On désigne par $\widetilde{\varphi}:\pi^*M\rightarrow\mathcal{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ le morphisme obtenu de φ par adjonction. Ce dernier s'identifie à une section non-identiquement nulle de $\pi^*M^\vee\otimes\mathcal{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$, dont le diviseur $\mathrm{div}(\widetilde{\varphi})$ est effectif. On a donc $\deg_X\Big(c_1(\mathscr{L})^d[\mathrm{div}(\widetilde{\varphi})]\Big)\geq 0$. Or $[\mathrm{div}\widetilde{\varphi}]=-\pi^*c_1(M)+c_1(\mathcal{F})+nc_1(L)$ dans $\mathrm{CH}^1(X)$, donc

$$\begin{aligned}\deg_X\Big(c_1(\mathscr{L})^d[\mathrm{div}(\widetilde{\varphi})]\Big)&=\deg_X\Big((-\pi^*c_1(M)+c_1(\mathcal{F})+nc_1(L))c_1(\mathscr{L})^d\Big)\\&=-\deg_C\Big(c_1(M)\pi_*(c_1(\mathscr{L})^d)\Big)+\deg_X(c_1(\mathcal{F})c_1(\mathscr{L})^d)\\&\quad+n\deg_X(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^d).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\deg_C(M) \leq \frac{\deg_X(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^d)}{\deg_{\mathscr{L}_K} X_K} + \frac{\deg_X(c_1(\mathcal{F})c_1(\mathscr{L})^d)}{\deg_{\mathscr{L}_K} X_K}.$$

Enfin, d'après la comparaison que l'on a établi dans la proposition 4.3.4, on déduit la majoration linéaire en n de $\mu_{\max}(\pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}))$ annoncée. □

Théorème 4.3.6. — *1) La suite de polygones de Harder-Narasimhan $(\mathcal{P}_{B_n}/n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction concave $\mathcal{P}_L^\pi$.*

2) Les suites $(\mu_{\max}(B_n)/n)_{n\geq 1}$ et $(\mu_{\min}(B_n)/n)_{n\geq 1}$ convergent respectivement vers deux nombres réels $\mu_{\max}^\pi(L)$ et $\mu_{\min}^\pi(L)$.

3) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \chi(B_n) = (d+1)c_1(L_{K'})^d \mathcal{P}_L^\pi(1) = c_1(L)^{d+1}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 4.3.5, la condition du théoème 4.3.2 est vérifiée pour l'algèbre $B = \bigoplus_{n\geq 0} \pi_*(L^{\otimes n})$. On obtient donc 1) et 2). D'après 1), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(B_n)}{n} = \mathcal{P}_L^\pi(1)$. En outre, d'après (64), $\chi(B_n) = \deg(B_n) - \operatorname{rg}(B_n)(1-g)$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\chi(B_n)}{n \operatorname{rg}(B_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(B_n)}{n}$. Le théorème de Riemann-Roch montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \chi(B_n) = c_1(L)^{d+1}, \qquad \operatorname{rg}(B_n) = \frac{c_1(L_{K'})^d}{d!} n^d + O(n^{d-1}).$$

On en déduit donc 3). □

4.3.3. Pente maximale asymptotique. — On montre que la fonction $\mu_{\max}^\pi$ définie sur l'ensemble des fibrés inversibles relativement amples sur X est sur-additive. Ce résultat permet d'étendre le domaine de définition de $\mu_{\max}^\pi$ à $\operatorname{Pic}(X)$ — le groupe de toutes les classes d'isomorphisme de fibrés inversibles sur X.

Lemme 4.3.7. — *Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini et non-nuls. Si $\pi_*(E_1)$ et $\pi_*(E_2)$ sont tous les deux non-nuls, alors on a*

$$\mu_{\max}(\pi_*(E_1 \otimes E_2)) \geq \mu_{\max}(\pi_* E_1) + \mu_{\max}(\pi_* E_2) - 2a(C),$$

où $a(C)$ est la constante définie dans §4.3.1.

Démonstration. — Comme $\pi_*(E_1)$ et $\pi_*(E_2)$ sont non-nuls, d'après la proposition 4.3.4, il existe deux $\mathcal{O}_C$-modules inversibles M_1 et M_2 ainsi que deux homomorphisme injectifs $M_1 \longrightarrow \pi_*(E_1)$ et $M_2 \longrightarrow \pi_*(E_2)$ tels que $\deg M_1 \geq \mu_{\max}(\pi_* E_1) - a(C)$ et $\deg M_2 \geq \mu_{\max}(\pi_* E_2) - a(C)$. Comme $M_1^\vee \otimes \pi_*(E_1)$ et $M_2^\vee \otimes \pi_*(E_2)$ ont des sections non partout nulles au-dessus de C, $\pi^*(M_1)^\vee \otimes E_1$ et $\pi^*(M_2)^\vee \otimes E_2$ ont des sections non partout nulles au-dessus de X. Par conséquent,

$$H^0(X, \pi^*(M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes (E_1 \otimes E_2)) = H^0(C, (M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes \pi_*(E_1 \otimes E_2)) \neq 0.$$

Donc $0 \leq \mu_{\max}((M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes \pi_*(E_1 \otimes E_2))$, et donc

$$\mu_{\max}(\pi_*(E_1 \otimes E_2)) \geq \deg M_1 + \deg M_2 \geq \mu_{\max}(\pi_*(E_1)) + \mu_{\max}(\pi_*(E_2)) - 2a(C).$$

□

Proposition 4.3.8. — *Soient L, L_1 et L_2 des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples relativement à π.*

1) Pour tout entier $n \geq 1$, $\mu_{\max}^\pi(L^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^\pi(L)$.

2) Si M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors $\mu_{\max}^\pi(L \otimes \pi^* M) = \deg M + \mu_{\max}^\pi(L)$.

3) $\mu_{\max}^\pi(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^\pi(L_1) + \mu_{\max}^\pi(L_2)$.

4) S'il existe un homomorphisme non-nul $\varphi : L_1 \to L_2$ de $\mathcal{O}_X$-modules, alors $\mu_{\max}^\pi(L_1) \leq \mu_{\max}^\pi(L_2)$.

Démonstration. — 1) est immédiat d'après la définition de $\mu_{\max}^\pi$.

2) On a, pour n assez grand,

$$\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n})) = \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}) \otimes M^{\otimes n}) = \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n})) + n \deg M.$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n})) = \deg M + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))$.

3) D'après le lemme 4.3.7, pour tout entier n assez grand,

$$\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n} \otimes L_2^{\otimes n})) \geq \mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n})) + \mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n})) - 2a(C).$$

Donc $\displaystyle\frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n} \otimes L_2^{\otimes n}))}{n} \geq \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n}))}{n} + \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n}))}{n} - \frac{2a(C)}{n}$. Par passage à la limite on obtient $\mu_{\max}^\pi(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^\pi(L_1) + \mu_{\max}^\pi(L_2)$.

4) Pour tout entier $n \geq 1$ on a un homomorphisme injectif $\varphi^{\otimes n} : L_1^{\otimes n} \to L_2^{\otimes n}$. En prenant l'image directe on obtient un homomorphisme injectif de $\pi_*(L_1^{\otimes n})$ vers $\pi_*(L_2^{\otimes n})$. Par conséquent, on a $\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n})) \leq \mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n}))$. Par passage à la limite on obtient $\mu_{\max}^\pi(L_1) \leq \mu_{\max}^\pi(L_2)$. □

Définition 4.3.9. — Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π. D'après [**22**] II.4.6.13, il existe un entier $n_0(L, \mathscr{L}) > 0$ tel que $L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ soit ample relativement à π quel que soit $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$. On définit, pour tout entier $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$, $A_n(L, \mathscr{L}) = \mu_{\max}^\pi(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu_{\max}^\pi(\mathscr{L})$.

Proposition 4.3.10. — *1) La suite $(A_n(L, \mathscr{L}))_{n \geq n_0(L,\mathscr{L})}$ est croissante et converge vers une limite dans $\mathbb{R}$.*

2) Si M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, on a $A_n(L, \mathscr{L} \otimes \pi^* M) = A_n(L, \mathscr{L})$ pour tout $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$.

3) On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles et par $\mathcal{A}_\pi$ l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples. Alors

$$\inf_{\mathscr{L} \in \mathcal{A}} \lim_{n\to+\infty} A_n(L, \mathscr{L}) = \inf_{\mathscr{L}' \in \mathcal{A}_\pi} \lim_{n\to+\infty} A_n(L, \mathscr{L}'). \tag{65}$$

4) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module ample relativement à π, alors la valeur dans (65) *est égale à $\mu_{\max}^\pi(L)$.*

5) Si L est de la forme π^*M, où M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors la valeur dans (65) *est égale à* $\deg_C(M)$.

Démonstration. — 1) D'après la proposition 4.3.8 3), pour tout entier $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$,

$$\mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes(n+1)}) \geq \mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + \mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}).$$

Donc on a $A_{n+1}(L, \mathscr{L}) \geq A_n(L, \mathscr{L})$. D'autre part, comme $\mathscr{L}$ est ample relativement à π, il existe un $\mathcal{O}_C$-module inversible M tel que $\mathscr{L} \otimes \pi^* M$ soit ample (cf. la proposition 1.4.1 *infra*). Donc il existe un entier $m > 0$ et un homomorphisme injectif de L vers $(\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes m}$. Par conséquent,

$$\mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \leq \mu^\pi_{\max}((\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes m} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = (m+n)\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) + m \deg(M),$$

i.e., $A_n(L, \mathscr{L}) \leq m(\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) + \deg(M))$. La suite $(A_n(L, \mathscr{L}))_{n \geq n_0(L, \mathscr{L})}$ est alors croissante et bornée supérieurement, donc converge dans $\mathbb{R}$.

2) Si $L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ est ample relativement à π, il en est de même de $L \otimes (\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes n} = L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n}$ (cf. [**22**] II.4.6.5), et

$$\mu^\pi_{\max}(L \otimes (\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes n}) = \mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + n \deg M.$$

Par conséquent,

$$A_n(L, \mathscr{L} \otimes \pi^* M) = \mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + n \deg(M) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L} \otimes \pi^* M) = A_n(L, \mathscr{L}).$$

3) L'égalité (65) est une conséquence immédiate de 2) et de la proposition 1.4.1.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π, d'après la proposition 4.3.8, on a

$$\mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) \geq \mu^\pi_{\max}(L) + \mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) = \mu^\pi_{\max}(L).$$

Donc on a $\inf_{\mathscr{L} \in \mathcal{A}} \lim_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}) \geq \mu^\pi_{\max}(L)$. D'autre part, comme L est ample relativement à π,

$$\begin{aligned} \inf_{\mathscr{L}} \lim_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}) &\leq \lim_{n \to +\infty} A_n(L, L) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \Big(\mu^\pi_{\max}(L \otimes L^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(L)\Big) = \mu^\pi_{\max}(L). \end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité.

5) Si $L = \pi^* M$, où M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} A_n(L, \mathscr{L}) &= \mu^\pi_{\max}(\pi^* M \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) \\ &= \deg(M) + \mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) = \deg(M). \end{aligned}$$

□

Définition 4.3.11. — Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L on définit

$$\mu^\pi_{\max}(L) = \inf_{\mathscr{L}} \lim_{n \to +\infty} \Big(\mu^\pi_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L})\Big), \tag{66}$$

où $\mathscr{L}$ parcourt tous les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples relativement à π. C'est un élément dans $[-\infty, +\infty[$. Lorsque L est ample relativement à π, cette valeur est finie, et coïncide avec la limite $\lim_{n\to+\infty} \mu_{\max}(L^{\otimes n})/n$ (cf. la proposition 4.3.10 4)). La valeur $\mu_{\max}^{\pi}(L)$ est appelée la *pente maximale asymptotique* de L relativement à π.

La proposition suivante montre que les propriétés de la fonction $\mu_{\max}^{\pi}$ établie dans la proposition 4.3.8 sont encore valables pour la fonction généralisées.

Proposition 4.3.12. — *1) Pour tous $\mathcal{O}_X$-modules inversibles L_1 et L_2, on a*

$$\mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^{\pi}(L_1) + \mu_{\max}^{\pi}(L_2).$$

2) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tout entier $n > 0$ on a

$$\mu_{\max}^{\pi}(L^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^{\pi}(L).$$

3) Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles et s'il existe un homomorphisme non-nul de L_1 vers L_2, alors $\mu_{\max}^{\pi}(L_1) \leq \mu_{\max}^{\pi}(L_2)$.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tout $\mathcal{O}_C$-module inversible M on a

$$\mu_{\max}^{\pi}(L \otimes \pi^* M) = \mu_{\max}^{\pi}(L) + \deg(M).$$

Démonstration. — 1) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand,

$$\mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes 2n}) \geq \mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + \mu_{\max}^{\pi}(L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}),$$

d'où $A_{2n}(L_1 \otimes L_2, \mathscr{L}) \geq A_n(L_1, \mathscr{L}) + A_n(L_2, \mathscr{L})$. Par passage à la limite on obtient $\mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^{\pi}(L_1) + \mu_{\max}^{\pi}(L_2)$.

2) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier m assez grand, on a

$$\mu_{\max}^{\pi}(L^{\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes mn}) = n\mu_{\max}^{\pi}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}).$$

Par conséquent, on a $A_{mn}(L^{\otimes n}, \mathscr{L}) = nA_m(L, \mathscr{L})$. Par passage à la limite, on a $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^{\pi}(L)$.

3) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand, on a un homomophisme injectif de $L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ vers $L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Par conséquent, on a $\mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \leq \mu_{\max}^{\pi}(L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$, i.e., $A_n(L_1, \mathscr{L}) \leq A_n(L_2, \mathscr{L})$. Par passage à la limite, on a $\mu_{\max}^{\pi}(L_1) \leq \mu_{\max}^{\pi}(L_2)$.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand, on a

$$A_n(L \otimes \pi^* M, \mathscr{L}) = A_n(L, \mathscr{L}) + \deg(M).$$

Par passage à la limite on obtient $\mu_{\max}^{\pi}(L \otimes \pi^* M) = \mu_{\max}^{\pi}(L) + \deg(M)$. □

4.3.4. Pente maximale asymptotique et annulation de section globale. — La négativité de la pente maximale asymptotique est liée à l'annulation de section globale de certain fibré. Les résultats présentés dans ce sous-paragraphe sont analogue à ceux dans §4.2.4. On fixe dans ce sous-paragraphe un $\mathcal{O}_X$-module inversible L.

Proposition 4.3.13. — *1) Si $\mu^\pi_{\max}(L) > 0$, alors $\mu^\pi_{\max}(L^\vee) < 0$.*
2) Si $\mu^\pi_{\max}(L) < 0$, alors $H^0(X, L) = 0$.
3) Si L est ample, alors $\mu^\pi_{\max}(L) > 0$.

Démonstration. — 1) On a $\mu^\pi_{\max}(\mathcal{O}_X) = \mu^\pi_{\max}(\pi^*\mathcal{O}_C) = \deg(\mathcal{O}_C) = 0$, donc $\mu^\pi_{\max}(L) + \mu^\pi_{\max}(L^\vee) \le 0$ compte tenu de la proposition 4.3.12.

2) Si $H^0(X, L) \neq 0$, alors il existe un homomorphisme non-nul de $\mathcal{O}_X$ vers L, d'où $\mu^\pi_{\max}(L) \ge \mu^\pi_{\max}(\mathcal{O}_X) = 0$.

3) Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible tel que $\deg(M) > 0$. Comme L est ample, il existe un entier $n \ge 1$ tel que $\pi^*M^\vee \otimes L^{\otimes n}$ ait une section non identiquement nulle au-dessus de X. D'après 2), on a

$$\mu^\pi_{\max}(\pi^*M^\vee \otimes L^{\otimes n}) = n\mu^\pi_{\max}(L) + \deg(M^\vee) \ge 0,$$

Donc $\mu^\pi_{\max}(L) \ge \deg(M)/n > 0$. □

Théorème 4.3.14. — *Si $\mu^\pi_{\max}(L^\vee) < 0$, alors la condition suivante est satisfaite :*

> *il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathscr{L}$ et un nombre réel $\lambda > 0$ tels que, quels que soient les entiers $d > \lambda$ et $n > \lambda d$, $H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) = 0$.*

La réciproque est vraie lorsque $L^\vee$ est ample relativement à π.

Démonstration. — "$\Longrightarrow$": Si $\mu^\pi_{\max}(L^\vee) < 0$, alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un $\mathcal{O}_X$-module ample $\mathscr{L}$ tels que, pour tout entier m suffisamment grand, $A_m(L^\vee, \mathscr{L}) \le -\varepsilon$. Quitte à remplaçer $\mathscr{L}$ par l'une de ses puissances tensorielles, on peut supposer que $\mu^\pi_{\max}(L^\vee \otimes \mathscr{L}) \le \mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) - \varepsilon$. Soit λ une constante telle que $\lambda > \varepsilon^{-1}\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L})$. Pour tout entier $d \ge 1$ et tout entier $n > \lambda d$, on obtient, d'après la proposition 4.3.12,

$$\begin{aligned}(n-d)\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) + \mu^\pi_{\max}(L^{\vee\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) &\le \mu^\pi_{\max}((L^\vee \otimes \mathscr{L})^{\otimes n}) \\ = n\mu^\pi_{\max}(L^\vee \otimes \mathscr{L}) &\le n(\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) - \varepsilon).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\mu^\pi_{\max}(L^{\vee\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) \le d\mu^\pi_{\max}(\mathscr{L}) - n\varepsilon < 0$. Donc $H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) = 0$. Ainsi (X, L) satisfait à la condition.

"$\Longleftarrow$": On suppse que $L^\vee$ est ample relativement à π et que la condition est vérifiée pour L. La condition dans le théorème est équivalente à la condition suivante :

> *pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, quels que soient les entiers $d > \lambda$ et $n > \lambda d$, on ait $H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}) = 0$.*

En effet, si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, alors il existe un homomorphisme injectif de $\mathcal{L}$ dans une puissance tensorielle $\mathscr{L}^{\otimes m}$. Donc l'annulation de $H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes md})$ implique celle de $H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d})$.

Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible ample. Il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, L^{\vee\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes d}) = 0.$$

D'après le lemme 4.3.3, on a

$$\mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes d})) = d \deg M + \mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee\otimes n})) \leq g - 1.$$

On prend une suite $(d_n)_{n\geq 1}$ telle que

i) pour tout entier $n \geq 1$, $d_n > \lambda$,
ii) pour n suffisamment grand, $d_n < n/\lambda$,
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{d_n} = \lambda$.

Alors pour n suffisamment grand, on a $\deg(M) d_n + \mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee\otimes n})) \leq g - 1$, c'est-à-dire

$$\deg(M)\frac{d_n}{n} + \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee\otimes n}))}{n} \leq \frac{g-1}{n}.$$

Par passage à la limite, on obtient $\mu_{\max}^{\pi}(L^\vee) \leq -\lambda^{-1} \deg M < 0$. □

4.3.5. Pente maximale asymptotique d'un fibré vectoriel. — Par passage au fibré canonique sur le fibré projectif, on étend le domaine de définition de la fonction $\mu_{\max}^{\pi}$ à l'ensemble des fibrés vectoriels sur X. Si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul et si $p : \mathbb{P}(E) \to X$ est le morphisme canonique, on définit

$$\mu_{\max}^{\pi}(E) = \mu_{\max}^{\pi p}(\mathcal{O}_E(1)).$$

Remarque 4.3.15. — Si E est ample relativement à π, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_E(1)$ est ample relativement à πp, alors $\mu_{\max}^{\pi}(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\max}(\pi_*(S^n E))$.

Théorème 4.3.16. — *Si $\mu_{\max}^{\pi}(E^\vee) < 0$, alors la condition suivante est vérifiée :*

> *pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible M (ou de façon équivalente, il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample M), il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tels que, quels que soient les entiers $d > \lambda$ et $n > \lambda d$, on ait $H^0(X, S^n E^\vee \otimes M^{\otimes d}) = 0$.*

La réciproque est vraie lorsque $E^\vee$ est ample relativement à π, c'est-à-dire que le faisceau inversible $\mathcal{O}_{E^\vee}(1)$ est ample relativement à πp.

Démonstration. — La condition dans ce théorème est équivalente à la condition dans le théorème 4.3.14 pour $(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$:

> *pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}$-module inversible L (ou de façon équivalente, il existe un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}$-module inversible ample L), il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tels que, quels que soient les entiers $d > \lambda$ et $n > \lambda d$, on ait $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes L^{\otimes d}) = 0$.*

En effet, si M est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors

$$H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n)\otimes p^*M^{\otimes d}) = H^0(X, p_*(\mathcal{O}_{E^\vee}(n)\otimes p^*M^{\otimes d})) = H^0(X, S^nE^\vee\otimes M^{\otimes d}).$$

Donc l'annulation de $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes p^*M^{\otimes d})$ implique celle de $H^0(X, S^nE^\vee \otimes M^{\otimes d})$. Réciproquement, d'après la proposition 1.4.1 il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible M tel que $L := \mathcal{O}_{E^\vee}(1) \otimes p^*M$ soit ample. On a $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes L^{\otimes d}) = H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n+d) \otimes p^*M^{\otimes d}) = H^0(X, S^{n+d}E^\vee \otimes M^{\otimes d})$. Si ce dernier espace s'annule lorsque n/d est assez grand, alors il en est de même de $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes L^{\otimes d})$.

"$\Longrightarrow$": Comme $\mu_{\max}^{\pi p}(\mathcal{O}_{E^\vee}(1)) = \mu_{\max}^{\pi}(E^\vee)$, on a $\mu_{\max}^{\pi p}(\mathcal{O}_{E^\vee}(1)) < 0$. D'après le théorème 4.3.14, la condition comme ci-dessus est vérifiée.

"$\Longleftarrow$": Si la condition dans ce théorème est vérifée pour (X, E), alors la conidition dans le théorème 4.3.14 est vérifiée pour $(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$. Si de plus $E^\vee$ est ample relativement à π, alors $\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)$ est ample relativement à πp. Le théorème 4.3.14 implique alors que $\mu_{\max}^{\pi p}(\mathcal{O}_{E^\vee}(1)) = \mu_{\max}^{\pi}(E^\vee) < 0$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abbes & T. Bouche – "Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"", *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] P. Autissier – "Points entiers sur les surfaces arithmétiques.", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **531** (2001), p. 201–235.

[3] J.-B. Bost – "Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz)", *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.

[4] ———, "Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields", *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques* (2001), no. 93, p. 161–221.

[5] ———, "Germs of analytic varieties in algebraic varieties: canonical metrics and arithmetic algebraization theorems", in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 371–418.

[6] J.-B. Bost – "Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria [in *proceedings of the international congress of mathematicians, vol. ii (madrid, 2006)*, 537-562, european mathematical society]", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006)* (Switzerland), European Mathematical Society, 2007.

[7] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – "Heights of projective varieties", *Journal of the American Mathematical Society* **7** (1994), no. 4, p. 903–1027.

[8] J.-B. Bost & K. Künnemann – "Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. geometry of numbers", prépublication `http://arxiv.org/abs/math/0701343`, 2007.

[9] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XIII. Livre VI: Intégration. Chapitres 1, 2, 3 et 4: Inégalités de convexité, Espaces de Riesz, Mesures sur les*

espaces localement compacts, Prolongement d'une mesure, Espaces L^p, Deuxième édition revue et augmentée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1175, Hermann, Paris, 1965.

[10] ______, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.

[11] ______, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1983, Algèbre commutative. Chapitre 8. Dimension. Chapitre 9. Anneaux locaux noethériens complets. [Commutative algebra. Chapter 8. Dimension. Chapter 9. Complete Noetherian local rings].

[12] A. Chambert-Loir – "Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne (d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky)", *Astérisque* (2002), no. 282, p. Exp. No. 886, viii, 175–209, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[13] H. Chen – "Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov : application à l'algébrisation et à l'étude asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan", Thèse de l'Ecole Polytechnique, Décembre 2006.

[14] ______, "Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles", preprint, 2007.

[15] T. Chinburg – "Capacity theory on varieties", *Compositio Mathematica* **80** (1991), no. 1, p. 75–84.

[16] D. Eisenbud – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[17] G. Faltings & G. Wüstholz – "Diophantine approximations on projective spaces", *Inventiones Mathematicae* **116** (1994), no. 1-3, p. 109–138.

[18] M. Fekete – "Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten", *Mathematische Zeitschrift* **17** (1923), no. 1, p. 228–249.

[19] É. Gaudron – "Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale", *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* (2007), à paraître.

[20] H. Gillet & C. Soulé – "An arithmetic Riemann-Roch theorem", *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.

[21] D. Grayson – "Reduction theory using semistability", *Commentarii Mathematici Helvetici* **59** (1984), no. 4, p. 600–634.

[22] A. Grothendieck & J. Dieudonné – "Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes", *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1961), no. 8, p. 222.

[23] ———, "Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I", *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1961), no. 11, p. 167.

[24] ———, "Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I", *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1964), no. 20, p. 259.

[25] G. Harder & M. S. Narasimhan – "On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves", *Mathematische Annalen* **212** (1974/1975), p. 215–248.

[26] R. Hartshorne – "Ample vector bundles", *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1966), no. 29, p. 63–94.

[27] ———, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Volume 156, Spring-Verlag, Berlin, 1970.

[28] L. Hörmander – *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[29] ———, *Notions of convexity*, Progress in Mathematics, vol. 127, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[30] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.

[31] H. Randriambololona – "Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), p. 67–88.

[32] R. Rumely – "On the relation between Cantor's capacity and the sectional capacity", *Duke Mathematical Journal* **70** (1993), no. 3, p. 517–574.

[33] R. Rumely & C. F. Lau – "Arithmetic capacities on $\mathbf{P}^N$", *Mathematische Zeitschrift* **215** (1994), no. 4, p. 533–560.

[34] R. Rumely, C. F. Lau & R. Varley – "Existence of the sectional capacity", *Memoirs of the American Mathematical Society* **145** (2000), no. 690, p. viii+130.

[35] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol & J. Kramer – *Lectures on arakelov geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, 1992.

[36] U. Stuhler – "Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischen Formen", *Archiv der Mathematik* **27** (1976), p. 604–610.

[37] A. C. THOMPSON – *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[38] S. ZHANG – "Positive line bundles on arithmetic varieties", *Journal of the American Mathematical Society* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.